ولا

الجبر

الصف الأول الثانوي

الفصل الدراسي الثاني

المصفوفات

المصفوفة هى مجموعة من العناصر (أعداد أو عناصر) موضوعة على هيئة صفوف وأعمدة ومحاطة بين قوسين

مثال ١ إذا كان ٢ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٩ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٨ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ ، ج = (٤ ٧)

أكتب نظام كل مصفوفة ثم أوجد $٢_{١٢} + ٢_{٣٢} + ٢_{٢١}$

، $ب_{١٢} + ب_{٣١} - ب_{٢٢}$ ، $ج_{٢١} + ٢_{٣٢}$

الحـــــــــل

٢ مصفوفة على النظام ٣×٣ ، ب مصفوفة على النظام ٢×٣ ، ج مصفوفة على النظام ١×٢

$٢_{١٢} = ٤$ ، $٢_{٣٢} = ٩$ ، $٢_{٢١} = ٢$

$٢_{١٢} + ٢_{٣٢} + ٢_{٢١} = ٤ + ٩ + ٢ = ١٥$

$ب_{١٢} + ب_{٣١} - ب_{٢٢} = ٢ + ٦ - ٧ = ١$

$ج_{٢١} + ٢_{٣٢} = ٧ + ٩ = ١٦$

مثال ٢ أكتب المصفوفة ٢ ($٢_{ص ع}$) على النظام ٣×٢ حيث $٢_{ص ع}$ = ٢ص - ع + ٢ الحـــــــل

المصفوفة ٢ التى على النظام ٣×٢ هى $\begin{pmatrix} ٢_{١١} & ٢_{٢١} \\ ٢_{١٢} & ٢_{٢٢} \\ ٢_{١٣} & ٢_{٢٣} \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$

$٢_{١١} = ٢×١ - ١ + ٢ = ٣$ ، $٢_{١٢} = ٢×١ - ٢ + ٢ = ٢$ ، $٢_{٢١} = ٢×٢ - ١ + ٢ = ٥$

$٢_{٢٢} = ٢×٢ - ٢ + ٢ = ٤$ ، $٢_{١٣} = ٢×٣ - ١ + ٢ = ٧$ ، $٢_{٢٣} = ٢×٣ - ٢ + ٢ = ٦$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب المصفوفه ا = $\begin{pmatrix} ٨ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ على النظام ……………………

، المصفوفه ب = $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٩ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ على النظام ……………………

ثم أوجد ١) $ا_{٢٢} + ا_{٣١}$ = ………………… ٢) $ب_{١٢} + ب_{٢٣}$ = ………………………

أنواع المصفوفات :

١) **مصفوفة الصف :** هى التى تتكون من صف واحد وعدة أعمدة

مثال على مصفوفة الصف $\begin{pmatrix} ٢ & ٧ & ٣ \end{pmatrix}$ صف واحد وثلاث أعمدة على النظام ١×٣

---

٢) **مصفوفة الأعمدة :** هى التى تتكون من عمود واحد وعدة صفوف

مثال على مصفوفة العمود $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$ ثلاث صفوف وعمود واحد على النظام ٣×١

---

٣) **المصفوفة المربعة :** هى المصفوفة التى عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها

مثال $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٩ \\ ٧ & ٤ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظام ٣×٣ **مثال** $\begin{pmatrix} ٨ & ٧ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة على النظام ٢×٢

---

٤) **المصفوفة الصفرية :** هى المصفوفة التى جميع عناصرها تساوى صفر

مثال $\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} . & . \\ . & . \\ . & . \end{pmatrix}$ ويرمز لها بالرمز ▭

---

٥) **المصفوفة القطرية :** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا القطر الرئيسى

مثال $\begin{pmatrix} ٢ & . \\ . & ٣ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٣ & . & . \\ . & ٢ & . \\ . & . & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ٣ & . & . \\ . & . & . \\ . & . & ١ \end{pmatrix}$

---

١) **مصفوفة الوحدة :** هى مصفوفة مربعة جميع عناصرها تساوى صفر ماعدا عناصر القطر الرئيسى يساوى واحد صحيح

مثال $\begin{pmatrix} ١ & . \\ . & ١ \end{pmatrix}$ أو $\begin{pmatrix} ١ & . & . \\ . & ١ & . \\ . & . & ١ \end{pmatrix}$ ويرمز لها بالرمز I

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تساوى مصفوفتين

شرط تساوى مصفوفتان

١) المصفوفتان على نفس النظام   ٢) جميع العناصر المتناظرة متساوية

مثال١ إذا كان $\begin{pmatrix} س^٢ & ٥ & ٧ \\ ١ & & ٣ص + ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & & ٧ \\ ١ & & ص + ١٦ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص

الحـــــــل

$س^٢ - ٥ = ٧$	$٣ص + ١٠ = ص + ١٦$
$س^٢ = ٧ + ٥$	$٣ص - ص = ١٦ - ١٠$
$س^٢ = ١٢$ $س = ٦$	$٢ص = ٦$ $ص = ٣$

مثال٢ إذا كان $\begin{pmatrix} ٨ & ١٥ \\ ١ & ص + ع \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ل^٣ & س^٢ & ١ \\ ص & & ٨ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص ، ع

الحـــــــل

$ل^٣ = ٨$	$س^٢ - ١ = ١٥$	$ص = -١$	$ص + ع = ٨$
$ل = \sqrt[٣]{٨} = ٢$	$س^٢ = ١٥ + ١$		$-١ + ع = ٨$
	$س^٢ = ١٦$ $س = \pm ٤$		$ع = ٨ + ١ = ٩$

تدريب إذا كان $\begin{pmatrix} س^٢ - ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ص & ٩ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٤ \\ ٣ & ص \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص

الحـــــــل

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ضرب عدد حقيقى فى مصفوفه

مثال ١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد ٢أ ، –أ ، –٣أ

الحــــــــل

٢أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -٤ \\ ١٤ & ٤ \end{pmatrix}$

، –أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٧ & -٢ \end{pmatrix}$

، –٣أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٢١ & -٦ \end{pmatrix}$

مدور المصفوفة

لإيجاد مدور أى مصفوفة نستبدل الصفوف بالأعمدة والأعمدة بالصفوف

مثال ١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ أوجد أ$^{\text{مد}}$ **الحــــــــل**

أ$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٤ & -٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

مثال ٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$ أوجد أ$^{\text{مد}}$ ثم أوجد (أ$^{\text{مد}}$)$^{\text{مد}}$ **الحــــــــل**

أ$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٢ \\ ٨ & ٦ & ٤ \\ ١٢ & ٩ & ٦ \end{pmatrix}$ ، (أ$^{\text{مد}}$)$^{\text{مد}}$ = $\begin{pmatrix} ٦ & ٤ & ٢ \\ ٩ & ٦ & ٣ \\ ١٢ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

لاحظ أن أ = (أ$^{\text{مد}}$)$^{\text{مد}}$

تدريب إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ٤ \\ ١ & ٤ & ٧ \end{pmatrix}$ أوجد أ$^{\text{مد}}$ =

تدريب إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٧ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٥ \\ ٤ \\ ٧ \end{pmatrix}$

أوجد أ$^{\text{مد}}$ = أوجد ب$^{\text{مد}}$ =

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المصفوفة المتماثلة وشبه المتماثلة

١) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى متماثلة إذا كان أ = $أ^{مد}$

مثال١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ **الحل**

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٤ \\ ٣ & ٩ & ٥ \\ ٤ & ٥ & ٠ \end{pmatrix}$

لاحظ أن أ = $أ^{مد}$ $أ_{٢١} = أ_{١٢}$ ، $أ_{٣١} = أ_{١٣}$ ، $أ_{٣٢} = أ_{٢٣}$

ملحوظه هامه إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن أ − $أ^{مد}$ = $\square$

٢) إذا كانت أ مصفوفة مربعة فإنها تسمى شبه متماثلة إذا كان أ = − $أ^{مد}$

مثال٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٦ \\ ١ & ٦ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد $أ^{مد}$ **الحل**

$أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & ١ \\ ٤ & ٠ & ٦ \\ ١ & ٦ & ٠ \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} ٠ & ٤ & ١ \\ -٤ & ٠ & ٦ \\ ١ & ٦ & ٠ \end{pmatrix} = -أ$

أ = $-أ^{مد}$ أ مصفوفة شبه متماثلة

ملحوظه هامه إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن أ + $أ^{مد}$ = $\square$

مثال٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & س & ٥ \\ ٣ & ٦ & ص \\ ٥ & ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد س ، ص إذا كانت

١) أ مصفوفة متماثلة ٢) أ مصفوفة شبه متماثلة **الحل**

إذا كانت أ مصفوفة متماثلة فإن س = ٣ ، ص = − ٤

إذا كانت أ مصفوفة شبه متماثلة فإن س = − ٣ ، ص = ٤

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٤س & ٢ \\ ٥ & ٢ & ٨ \\ ٠ & ٥ & س + ٣ص \end{pmatrix}$ مصفوفه متماثلة

أوجد س ، ص

الحـــــل المصفوفة أ متماثلة

$٤س = -٨$

$س = \frac{-٨}{٤} = -٢$

، $س + ٣ص = ٤$

$-٢ + ٣ص = ٤$

$٣ص = ٤ + ٢$

$٣ص = ٦$ ∴ $ص = \frac{٦}{٣} = ٢$

تدريب ١ إذا كان المصفوفه $\begin{pmatrix} ٢س & ٨ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ متماثلة أوجد س

تدريب ٢ إذا كان المصفوفه $\begin{pmatrix} ٢س & ٨ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ شبه متماثلة أوجد س

جمع وطرح المصفوفات

شرط جمع مصفوفتان ان تكون المصفوفتان على نفس النظام

مثال١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ & ٢ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ + ب **الحـــــل**

$أ + ب = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ١ & -٢ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٤ & ٥ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٧ \\ ٥ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix}$

مثال٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٥ & ١ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد أ + بمد **الحـــل**

$أ + ب^{مد} = \begin{pmatrix} ٣ & -٢ & ٦ \\ ٠ & ٤ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٦ \\ ٢ & ٥ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ & ١ & ٦ \\ ٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٣ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ١ \\ ٣ & ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ & ٤ \\ ١ & ١ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد ٣أ − ٢ب

الحـــــــل

٣ أ − ٢ب = $\begin{pmatrix} ٠ & ٦ & ٣ \\ ٩ & ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ & ٢ & ٨ \\ ٢ & -٢ & -١٤ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٤ & ٨ & ٥ \\ ١١ & ٢ & ٨ \end{pmatrix}$

مثال ٤ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٠ & ١ & ٢ \\ ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٧ \\ ٥ & ١٢ & ٤ \\ ٣ & ٢١ & ١٠ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفة س بحيث ٢ أ + ب − س = ☐

الحـــــــل

س = ٢ أ + ب

س = $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ & ٤ \\ ٦ & ٦ & ٤ \\ ٤ & ١٠ & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٧ \\ -٥ & ١٢ & ٤ \\ ٣ & ٢١ & ١٠ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ & ١١ \\ ١ & ١٨ & ٠ \\ ٧ & ٣١ & ١٨ \end{pmatrix}$

تدريب ١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٣ \\ ١ & ٦ & ٥ \\ ٢ & ١ & ٤ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٤ & ٢ \\ ١ & ٢ & ٣ \\ ٠ & ٥ & ١ \end{pmatrix}$

أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن أ + س = ٢ب

الحـــــل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

خاصيه هامه $(\text{ا} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{ا}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

مثال٥ إذا كان $\text{ا} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ ، $\text{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ -١ & ٣ \end{pmatrix}$

حقق أن $(\text{ا} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{ا}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

الحـــــــل

$\text{ا} + \text{ب} = \begin{pmatrix} -٣ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٥ \\ ١ & ٨ \end{pmatrix}$

$(\text{ا} + \text{ب})^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ (١)

، $\text{ا}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٥ & ٨ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $(\text{ا} + \text{ب})^{\text{مد}} = \text{ا}^{\text{مد}} + \text{ب}^{\text{مد}}$

مثال٦ إذا كان $\left(\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ٦ \end{pmatrix} \right)^{\text{مد}} = \begin{pmatrix} ٣\text{ك} & -\text{ص} \\ ٢\text{س} & ١١ \end{pmatrix}$

الحـــــــل

$\begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٣ & ٥ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣\text{ك} & \text{ص} \\ ٢\text{س} & ١١ \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٣ & ٦ \\ ٦ & ١١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣\text{ك} & \text{ص} \\ ٢\text{س} & ١١ \end{pmatrix}$

$٣\text{ك} = ٣$	$٦ = -\text{ص}$	$-٦ = ٢\text{س}$
$\text{ك} = ١$	$\text{ص} = -٦$	$\text{س} = -٣$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ضرب المصفوفات

شرط ضرب مصفوفتين : أن تكون عدد أعمدة المصفوفة الاولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية

مثال١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب

الحل

أ ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ١ \\ ١ & ١ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٢\ ٢\ ٣\ ٢\ ١\ ٣ & ٢\ ١\ ٣\ ٤\ ١\ ١ \\ ١\ ٢\ ١\ ٢\ ٢\ ٣ & ١\ ١\ ١\ ٤\ ٢\ ١ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ١٣ & ١٥ \\ ١٠ & ٧ \end{pmatrix}$

لاحظ أن $أ_{٢\ ٣}$ ، $ب_{٣\ ٢}$ يكون حاصل الضرب على النظام ٢×٢ الحل

مثال٢ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ٤ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد أ ب الحل

أ ب = $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & -٤ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$

= $\begin{pmatrix} ٣\ ٠ & ٦\ ٣ \\ ٢\ ٠ & ٤\ ١٢ \\ ٠\ ٠ & ٠\ ٦ \end{pmatrix}$ = $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ١٦ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix}$

تدريب١ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ، ب = $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$

أوجد أ ب ، ب أ وماذا تلاحظ الحل

أ ب = $\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}$ = ( ) = ( )

ب أ = $\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}$ = ( ) = ( )

أ ب ≠ ب أ أى أن الضرب ليس ابدالى

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$ أوجد $أ\,I$ **الحـــل**

$$أ\,I = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣\;: & :\;٢ \\ ١\;. & .\;٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix}$$

أى أن المحايد الضربى هو مصفوفة الوحده I

مثال٢ إذا كان $س = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن $س^{٢} - ٢س - ٣I = \square$ **الحـــل**

$$س^{٢} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix}$$

$$س^{٢} - ٢س - ٣I = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix} - ٢\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} - ٣\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٠ & ٩ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٤ \\ ٠ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٠ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \square$$

تدريب٣ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ أثبت أن $أ^{٢} - ٥أ - ٢I = \square$ **الحـــل**

واجب إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ أثبت أن $أ^{٢} - ٥أ + ٢I = \square$ **الحـــل**

مدور حاصل ضرب مصفوفتين $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

مثال ٣ إذا كان المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ٩ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix}$

فحقق أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$ **الحـــــل**

$أ\ ب = \begin{pmatrix} ٤ & ١ & ٢ \\ ٧ & ٥ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٦ \\ ٩ & ٣ \\ ٨ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٩ & ٢٣ \\ ٨ & ١٧ \end{pmatrix}$

$(أ\ ب)^{مد} = \begin{pmatrix} ١٧ & ٢٣ \\ ٨ & ٣٩ \end{pmatrix}$ (١)

$ب^{مد} \times أ^{مد} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ & ٦ \\ ٨ & ٩ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ & ٢ \\ ٥ & ١ \\ ٧ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣٩ & ٢٣ \\ ٨ & ١٧ \end{pmatrix}$ (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$

تدريب ٣ إذا كان المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ١ \\ ٢ & ٠ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٠ & ١ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

إثبت أن $(أ\ ب)^{مد} = ب^{مد} \times أ^{مد}$ **الحـــــل**

مثال ٤ إذا كان المصفوفة أ على النظام ٣×٢ ، المصفوفة ب على النظام ٢×٣ فإن حاصل ضرب أ ب تكون على النظام ....

مثال ٥ إذا كان المصفوفة أ على النظام ٢×٣ ، $ب^{مد}$ على النظام ١×٣ فإن حاصل ضرب أ ب تكون على النظام ......

أ/ أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المحددات

محدد الرتبه الثانيه :

طريقة فك محدد الرتبه الثانيه $\begin{vmatrix} م & ب \\ جـ & ء \end{vmatrix}$ = م ء – ب جـ

مثال١ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٥ – ١٦ = –١

مثال٢ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} ٤ & ٧ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ = ٢٤ + ١٤ = ٣٨

مثال٣ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} -٨ & ٤ \\ ٦ & ٣ \end{vmatrix}$ = – ٢٤ + ٢٤ = ٠

تدريب١ أوجد قيمة كلاً من $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ ، $\begin{vmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٣ & ٨ \end{vmatrix}$ =

$\begin{vmatrix} ٣ & ٥ \\ ٣ & ٧ \end{vmatrix}$ =

$\begin{vmatrix} ٤ & ١٢ \\ ٢ & ٦ \end{vmatrix}$ =

مثال٤ أوجد قيمة $\begin{vmatrix} جا\theta & جتا\theta \\ جتا\theta & جا\theta \end{vmatrix}$ = $جا^٢\theta$ + $جتا^٢\theta$ = ١

مثال٥ أوجد قيمة س إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ١ \end{vmatrix}$ = ٦ الحـــــــل

٢س + ٨ = ٦ ٢س = ٦ – ٨ ٢س = –٢ س = –١

تدريب٢ أوجد قيمة س إذا كان $\begin{vmatrix} ٢س & ٢ \\ ٤ & ٣ \end{vmatrix}$ = ١٠ الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

محدد الرتبه الثالثه :

مثال ٦ أوجد قيمة

٢	٣	١
١	٢	٥
٣	١	١

الحـــــــل

يراعى قاعدة الاشارات

+ − +

= ٢ (٢×-١ − ٥×-١) − ٣ (١×-١ − ٥×٣) + (١×-١ − ٢×٣)

= ٢ (-٢ + ٥) − ٣ (-١ − ١٥) + (-١ − ٦) = ٢ (٣) − ٣ (-١٦) + (-٧)

= ٦ + ٤٨ − ٧ = ٤٧

مثال ٧ أوجد قيمة

٣	٢	٥
٢	٤	١
٧	٣	٦

الحـــــــل

+ − +

= -٣ (٤×٦ − ١×-٣) + ٢ (-٢×٦ − ١×٧) − ٥ (-٢×-٣ − ٤×٧)

= -٣ (٢٤ + ٣) + ٢ (-١٢ − ٧) − ٥ (٦ − ٢٨)

= -٣ (٢٧) + ٢ (-١٩) − ٥ (-٢٢) = -٨١ − ٣٨ + ١١٠ = -٩

المصفوفه المثلثيه : هى مصفوفه جميع عناصرها التى فوق أو تحت القطر الرئيسى تساوى صفر

قيمة محدد المصفوفه المثلثيه = حاصل ضرب عناصر القطر الرئيسى

مثال ٨ أوجد قيمة

٣	٠	٠
١	٢	٠
٤	٢	٧

= -٣ × ٢ × ٧ = -٤٢

مثال ٩ أوجد قيمة س إذا كان

س	٠	٠
١	٢	٠
٤	١	٣

= ١٢

الحـــــــل

س × ٢ × ٣ = ١٢ ، ٦ س = ١٢ ، س = $\frac{١٢}{٦}$ = ٢

مثال ١٠ أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه (−٤،٢) ، (٣،١) ، (−٢،٥)

الحـــــــل

م = $\frac{١}{٢}$ $\begin{vmatrix} ٤ & ٢ & ١ \\ ٣ & ١ & ١ \\ ٢ & ٥ & ١ \end{vmatrix}$

= $\frac{١}{٢}$ [− ٤(١ − ٥) − ٢ (٣ ٢) ١(١٥ ٢)]

= $\frac{١}{٢}$ [− ٤(− ٤) − ٢ (٥) ١(١٧)]

= $\frac{١}{٢}$ [١٦ ١٠ + ١٧] = $\frac{١}{٢}$ × ٢٣ = ١١.٥ وحده مربعه

تدريب أوجد مستخدماً المحددات مساحة سطح المثلث الذى رؤوسه (٢،٤) ، (٥،٢) ، (−٣،−٢)

مثال ١١ باستخدام المحددات أثبت أن النقاط (٣،٥) ، (٤،−١) ، (٥،−٧) تقع على استقامه واحده

الحـــــــل

Δ = $\begin{vmatrix} ٣ & ٥ & ١ \\ ٤ & ١ & ١ \\ ٥ & ٧ & ١ \end{vmatrix}$ = ٣(−١+٧) − ٥(٤ − ٥) + (− ٢٨+٥)

= ٣(٦) − ٥(−١) + (− ٢٣) = ١٨+٥ − ٢٣ = ٠

النقاط تقع على استقامه واحده

مثال ١٢ باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢س − ٣ص = ٣ ، س + ٢ص = ٥ الحـــــــل

Δ = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٤ + ٣ = ٧

Δس = $\begin{vmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٢ \end{vmatrix}$ = ٦ + ١٥ = ٢١ س = $\frac{Δس}{Δ}$ = $\frac{٢١}{٧}$ = ٣

Δص = $\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٥ \end{vmatrix}$ = ١٠ − ٣ = ٧ ص = $\frac{Δص}{Δ}$ = $\frac{٧}{٧}$ = ١ ∴ م.ح = {(٣،١)}

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢ س = ٣ص + ٥ ، ٣ س + ٤ص = -١ الحل

مثال ١٣ باستخدام كرامر أوجد مجموعة حل المعادلات ٢س + ص - ع = ٣ ، س + ص + ع = ١ ، س - ٢ص - ٣ع = ٤

الحل

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ = ٢(-٣+٢) - (-٣-١) - (-٢-١)

= ٢(-١) - (-٤) - (-٣) = -٢+٤+٣ = ٥

$$\Delta_{س} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$$ = ٣(-٣+٢) - (-٣-٤) - (-٢-٤)

= ٣(-١) - (-٧) - (-٦) = -٣+٧+٦ = ١٠

$$\Delta_{ص} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$ = ٢(-٣-٤) - ٣(-٣-١) - (٤-١)

= ٢(-٧) - ٣(-٤) - (٣) = -١٤+١٢-٣ = -٥

$$\Delta_{ع} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$ = ٢(٤+٢) - (٤-١) + ٣(-٢-١)

= ٢(٦) - (٣) + ٣(-٣) = ١٢-٣-٩ = صفر

س = $\frac{\Delta_{س}}{\Delta}$ = $\frac{١٠}{٥}$ = ٢ ، ص = $\frac{\Delta_{ص}}{\Delta}$ = $\frac{-٥}{٥}$ = -١ ، ع = $\frac{\Delta_{ع}}{\Delta}$ = $\frac{صفر}{٥}$ = صفر

م.ح = {(٢، -١، ٠)}

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المعكوس الضربى

لأى عددين حقيقين يكون كل منهما معكوس ضربى للآخر إذا كان حاصل ضربهما = ١

مثال١ $3 \times 3^{-1} = 1$ مثال٢ $س \times س^{-1} = 1$

لأى مصفوفتان يكون كل منهما معكوس ضربى للآخر إذا كان حاصل ضربهما = I

مثال $أ \times أ^{-1} = I$

ويسمى $أ^{-1}$ بالمعكوس الضربى للمصفوفه أ

ويكون للمصفوفه أ معكوس ضربى إذا كان محدد أ $\neq$ صفر

خطوات إيجاد المعكوس الضربى للمصفوفه أ

١) نوجد محدد أ = Δ حيث $\Delta \neq$ صفر

٢) نبدل عنصرى القطر الرئيسى

٣) نغير إشارة عنصرى القطر الفرعى

٤) نضرب المصفوفه الناتجه فى $\frac{1}{\Delta}$

مثال١ أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ الحـــــل

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2$ Δ صفر

$$أ^{-1} = \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$$

مثال٢ أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان أ = $\begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ الحـــــل

$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 18 = 0$ Δ = صفر $\therefore$ المصفوفه ليس لها معكوس ضربى

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب أوجد المعكوس الضربى للمصفوفه أ إذا كان $أ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix}$ الحـــل

مثال ٣ أوجد قيمة س إذا كانت للمصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٦ \end{pmatrix}$ معكوس ضربى الحـــل

المصفوفه لها معكوس ضربى إذا كان $\begin{vmatrix} ١ & س \\ ٣ & ٦ \end{vmatrix}$ ٠

∵ $٣س - ٦$ ٠ $\qquad ٣س \neq ٦$

س $\frac{٦}{٣}$ $\qquad س \neq ٢$

مثال ٤ إذا كانت المصفوفة $أ = \begin{pmatrix} ٤ & س \\ س & ٩ \end{pmatrix}$ لها معكوس ضربى فإن س ≠ ....

المصفوفه لها معكوس ضربى إذا كان $\begin{vmatrix} ٩ & س \\ س & ٤ \end{vmatrix}$ ٠

$س^٢ - ٣٦$ ٠ $\qquad س^٢ \neq ٣٦ \qquad$ س ٦

أو $س \in ح - \{٦ ، -٦\}$

لاحظ أن ١) $(أ\ ب)^{-١} = ب^{-١}\ أ^{-١}$ $\qquad$ ٢) $(أ^{-١})^{-١} = أ$

هام ١) $أ\ \tilde{س} = ج$ فإن $\tilde{س} = أ^{-١}\ ج$

٢) $\tilde{س}\ أ = ج$ فإن $\tilde{س} = ج\ أ^{-١}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix} \times س = \begin{pmatrix} -١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

الحـــــل

$س = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}^{-١} \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$ ← ١ ولإيجاد المعكوس الضربى

$\Delta = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٠ & ٣ \end{vmatrix} = ٠ + ٣ = ٣$ Δ صفر

$م^{-١} = \frac{١}{٣} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & ١ \end{pmatrix}$ بالتعويض فى ١

$س = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & ٠ \\ \frac{٢}{٣} & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

$س = \begin{pmatrix} ١ + ٠ \\ ٢ + ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٣ \end{pmatrix}$

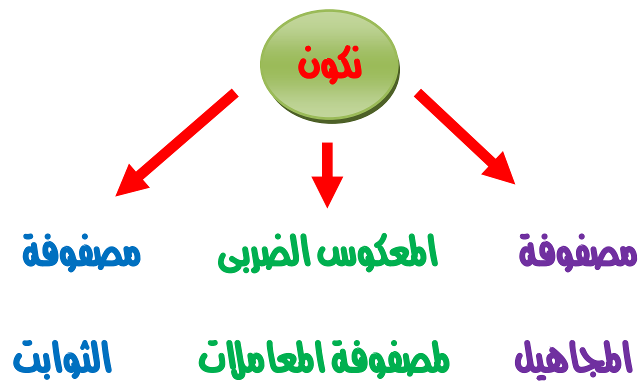
تدريب أوجد المصفوفه س والتى تحقق أن $س \times \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٠ & ٣ \\ ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

الحـــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

حل معادلتين باستخدام المصفوفات

$\text{أ}_1 \text{س} + \text{ب}_1 \text{ص} = \text{جـ}_1$ ، $\text{أ}_2 \text{س} + \text{ب}_2 \text{ص} = \text{جـ}_2$



$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{أ}_1 & \text{ب}_1 \\ \text{أ}_2 & \text{ب}_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \text{جـ}_1 \\ \text{جـ}_2 \end{pmatrix}$$

مثال: حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات

$\text{س} + \text{ص} = ٥$ ، $٢\text{س} - \text{ص} = ١$

الحـــــــل

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$$

← ١ نوجد المعكوس الضربى

$$\triangle = \begin{vmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{vmatrix} = -١ - ٢ = -٣$$

$$\text{أ}^{-1} = \frac{١}{-٣} \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{pmatrix}$$

بالتعويض فى ١

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{١}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{٢}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٣} & \frac{١}{٣} \\ \frac{١٠}{٣} & \frac{-١}{٣} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \text{س} \\ \text{ص} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٣ \end{pmatrix}$$

$\text{س} = ٢$ ، $\text{ص} = ٣$

$\therefore$ م.ح $= \{(٢ ، ٣)\}$

مثال٧ حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات

س − ٢ص = −١ ، ٢س − ٣ص = ٠

الحـــــــل

$\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}^{-١} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ ← نوجد المعكوس الضربى

$١ = ٤ + ٣- = \begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = \triangle$

$\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} \frac{١}{١} = ^{١-}أ$ بالتعويض فى ١

$\begin{pmatrix} ١ \\ ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ١ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ س = ٣ ، ص = ٢ ∴ م.ح = {(٣ ، ٢)}

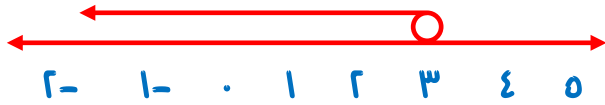
تدريب حل نظام المعادلتين الآتيتين باستخدام المصفوفات س + ٢ص = ٤ ، ٢س − ص = −٧

الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المتباينات الخطيه

مثال١ أوجد مجموعة حل المتباينه ٣س - ٤ < ٥ فى ح الحـــل



٣س ٥ + ٤

٣س ٩

س $\frac{٩}{٣}$

س ٣

م.ح =]- ∞ ، ٣[

مثال٢ أوجد مجموعة حل المتباينه -٣ < ٣س -٣ ≤ ٣ فى ح الحـــل

-٣ ٢س - ٣ ٣ بإضافة ٣ للمتباينه

-٣ + ٣ ٢س - ٣ + ٣ ٣ + ٣

٠ ٢س ٦ بالقسمة على ٢

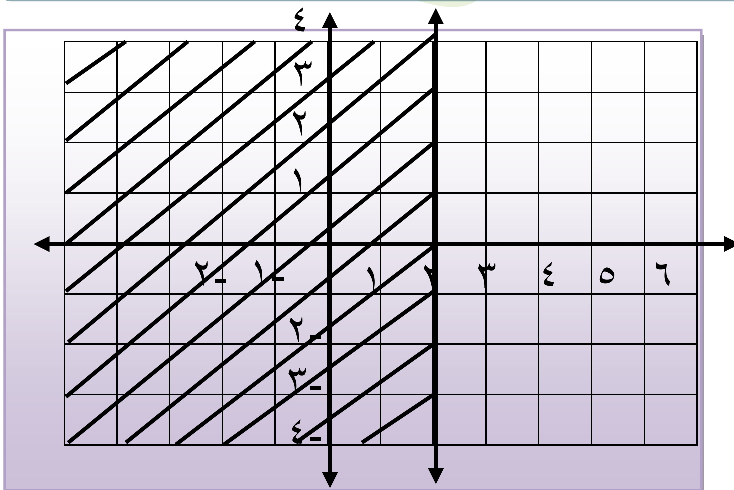


$\frac{٠}{٢}$ $\frac{٢}{٢}$ س $\frac{٦}{٢}$

٠ س ٣

م.ح =]٠ ، ٣]

مثال٣ أوجد مجموعة حل المتباينه ٥س -٧ ≥ ٢س -١ فى ح × ح الحـــل



٥س − ٢س ≥ -١ + ٧

٣س ٦ بالقسمة على ٣

$\frac{٣}{٣}$ س $\frac{٦}{٣}$

س ٢

تمثل بخط متصل

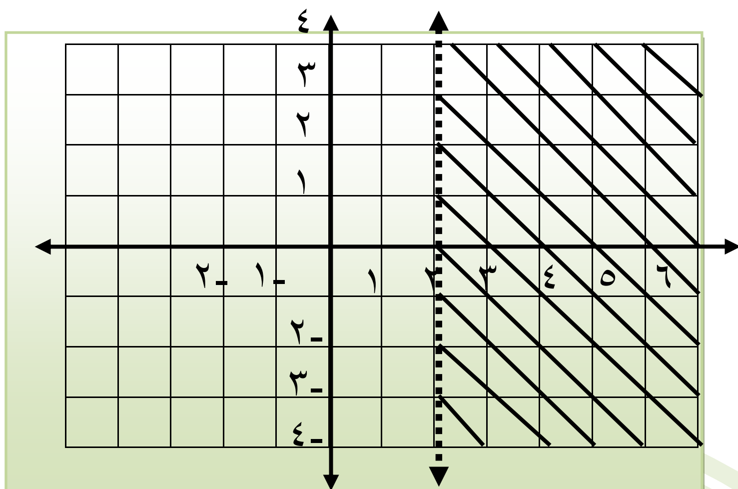
أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال: أوجد مجموعة حل المتباينه ٢س+٢ < س + ٣ فى ح × ح الحـــــــل

٢س – س < ٣ – ٢

س < ١

تمثل بخط متقطع



خطوات حل المتباينه فى متغيرين

١) نرسم المستقيم الذى يمثل المعادله المناظره المتباينه

٢) إذا كانت المتباينه (   ) أو (>) فإن المستقيم يكون متقطع

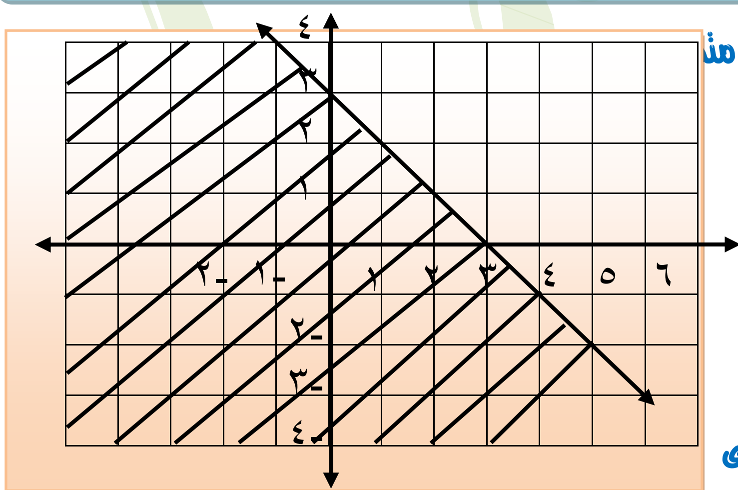
٣) إذا كانت المتباينه (   ) أو (≥) فإن المستقيم يكون متصل

٤) نأخذ نقطة أختبار لتكن (٠ ، ٠) ونبحث ما إذا كانت تحقق المتباينه أم لا

مثال: أوجد مجموعة حل المتباينه س + ص   ٣ فى ح × ح الحـــــــل

١) نرسم المستقيم ل : س + ص = ٣ بخط مت

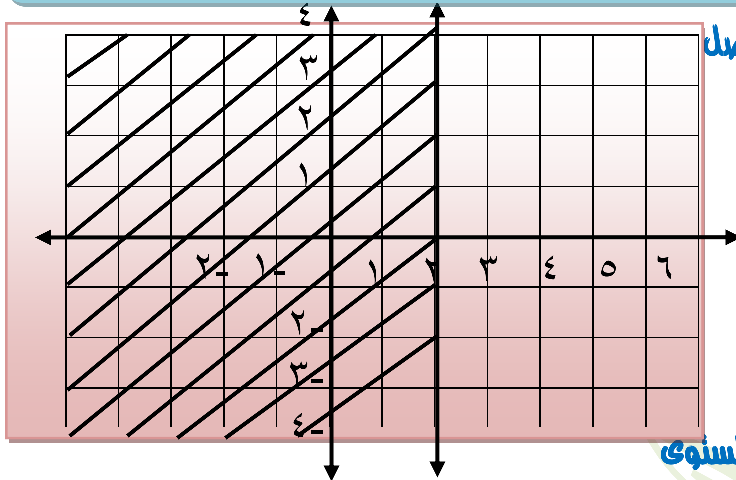
س	٠	٣
ص	٣	٠



٢) (٠،٠) تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)

مثال٦ أوجد مجموعة حل المتباينه س + ص ≥ ٣ فى ح × ح الحـــــل



١) نرسم المستقيم ل : س + ص = ٣ بخط متصل

س	٠	٣
ص	٣	٠

٢) (٠،٠) تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

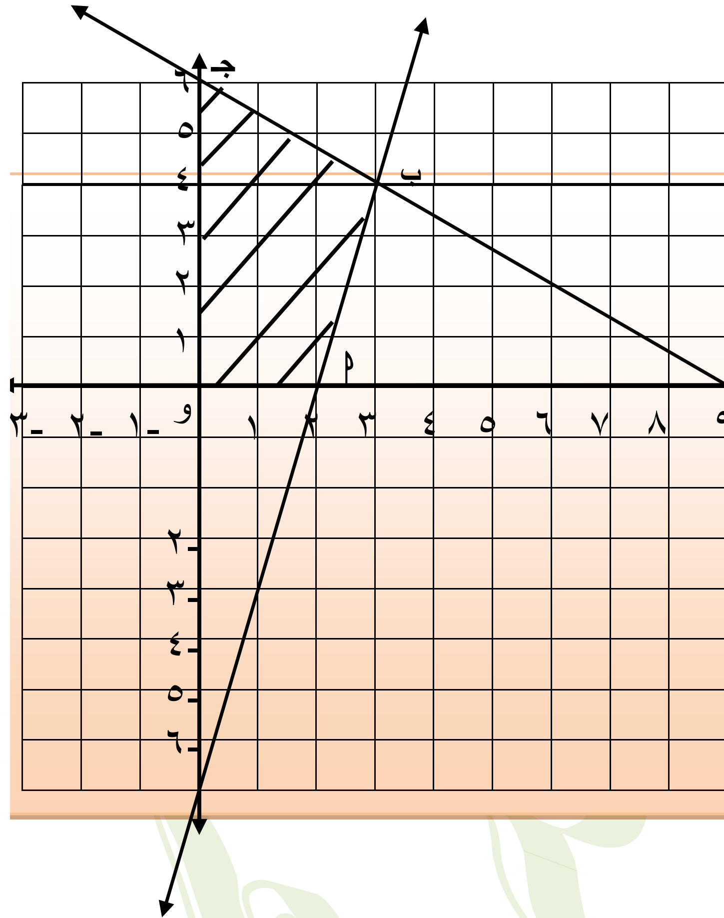
تدريب أوجد مجموعة حل المتباينه س - ٣ص ≥ ٣ فى ح × ح الحـــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٧ عين مجموعة حل المتباينات الآتيه معاً :

س ≥ ٠ ، ص ٠ ، ٢س + ٣ص ١٨ ، –٤س + ص ≥ –٨

ثم اوجد قيمة س ، ص التى تجعل دالة الهدف ر = ٢س + ص اكبر مايمكن **الحـــــل**



١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ← و ص ← الربع الاول

٢) نرسم المستقيم ٢س + ٣ص = ١٨ بخط متصل

س	٠	٩
ص	٦	٠

(٠،٠) تحقق المتباينة

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل ∪ نصف المستوى

الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)

٣) نرسم المستقيم –٤س + ص = –٨ بخط متصل

س	٠	٢
ص	–٨	٠

(٠،٠) تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقة م ب جـ و

٤) نحدد رؤوس الشكل م ب جـ و ، و(٠،٠) ، م = (٢،٠) ، ب = (٣،٤) ، جـ = (٠،٦)

ر = ٢س + ص

ر و = ٠×٠ + ٠ = ٠ ، ر م = ٢×٢ + ٠ = ٤

ر ب = ٢×٣ + ٤ = ٧ ، ر جـ = ٢×٠ + ٦ = ٦

اكبر قيمة لدالة الهدف عند النقطة ب = (٣،٤) س = ٣ ، ص = ٤

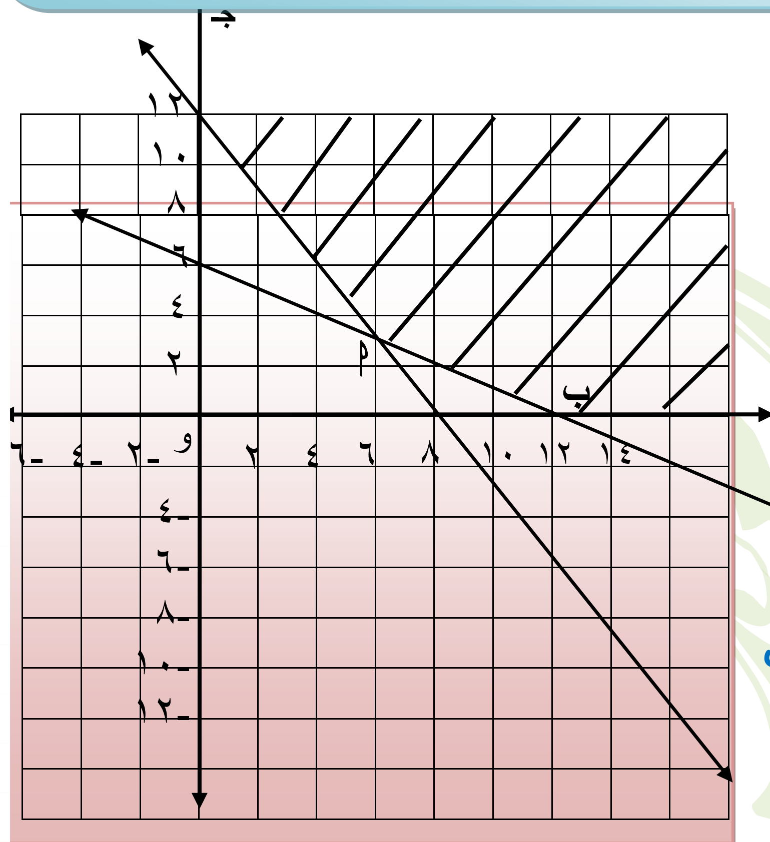
أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٨ عين مجموعة حل المتباينات الاتيه معاً :

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≥ ١٢ ، ٣س + ٢ص ≥ ٢٤

ثم اوجد قيمة س ، ص التى تجعل دالة الهدف ر = ٣س + ٤ص اقل مايمكن

الحــــــــل



١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

يمثلهما و س ← و ص ← الربع الاول

٢) نرسم المستقيم س + ٢ص = ١٢ بخط متصل

س	٠	١٢
ص	٦	٠

(٠،٠) لا تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى

الذى لا تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

٣) نرسم المستقيم ٣س + ٢ص = ٢٤ بخط متصل

س	٠	٨
ص	١٢	٠

(٠،٠) لا تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل٢ ∪ نصف المستوى الذى لا تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقة المظللة والمحدده بالنقاط م ب جـ

٤) نحدد رؤوس الشكل م ب جـ م = (٦،٣) ، ب = (١٢،٠) ، جـ = (٠،١٢)

ر = ٣س + ٤ص

رم = ٣×٦ + ٤×٣ = ١٨ + ١٢ = ٣٠

رب = ٣×١٢ + ٤×٠ = ٣٦ + ٠ = ٣٦ رجـ = ٣×٠ + ٤×١٢ = ٠ + ٤٨ = ٤٨

أقل قيمة لدالة الهدف عند النقطة م = (٦،٣) س = ٦ ، ص = ٣

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال مصنع للملابس ينتج نوعين من العبايات حريمى و رجالى ويلزم لعمل عبايه حريمى متراً من الصوف ومتران من القطن ، ويلزم لعمل عبايه رجالى متران من الصوف ومتران من القطن ، وكان لدى المصنع ٤٢ متراً من الصوف و ٥٤ من القطن ، فإذا كان ثمن بيع العبايه الحريمى ١٠٠ جنيه وثمن بيع العبايه الرجالى ١٥٠ جنيهاً ، فما عدد العبايات التى يجب أن ينتجها المصنع من كل نوع ليحصل على أكبر دخل ؟ علماً بأن المصنع يبيع كل إنتاجه

الحــــــــــل

	حريمى	رجالى	
الصوف	١	٢	٤٢
القطن	٢	٢	٥٤

دالة الهدف ر = ١٠٠س + ١٥٠ ص

نترجم البيانات الى نظام من المتباينات

١) س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ٢) س + ٢ص ٤٢ ٣) ٢س + ٢ص ٥٤

١) المتباينتان س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠

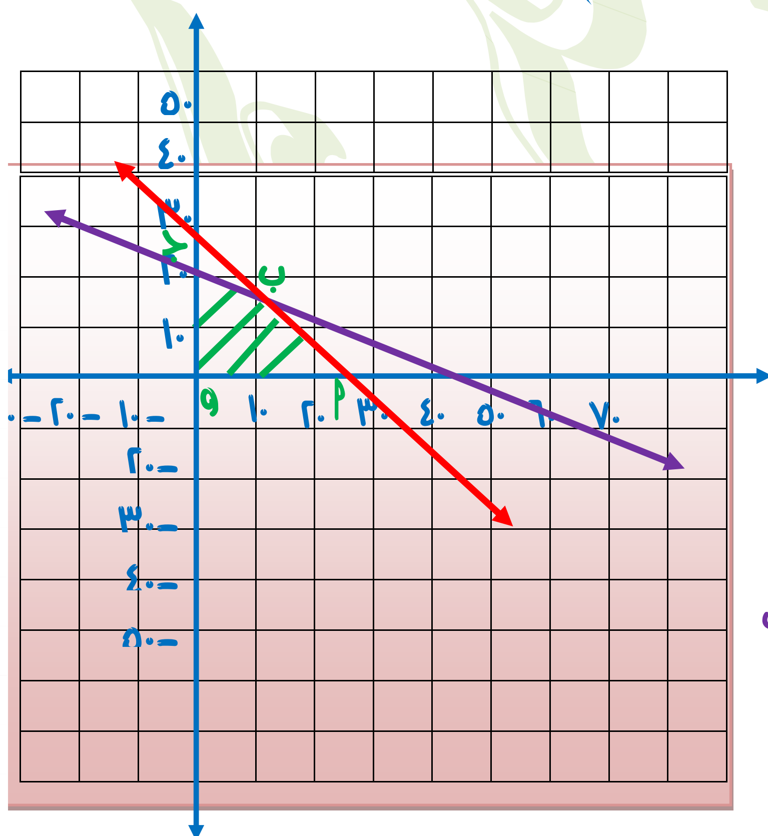
يمثلهما و س ← و و ص ← ∪ الربع الاول

٢) نرسم المستقيم س + ٢ ص = ٤٢ بخط متصل

س	٠	٤٢
ص	٢١	٠

(٠،٠) تحقق المتباينه

وتكون مجموعة الحل هى المستقيم ل١ ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطة (٠،٠)



أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

٣) نرسم المستقيم ٢ س + ٢ ص = ٥٤ بخط متصل

س	٠	٢٧
ص	٢٧	٠

(٠،٠) تحقق المتباينه وتكون مجموعة الحل المستقيم ل٣ ∪ نصف المستوى الذى تنتمى اليه النقطه (٠،٠)

∴ مجموعة حل المتباينات هى المنطقه المظلله والمحدده بالنقاط و ٲ ب جـ

٤) نحدد رؤوس الشكل و ٲ ب جـ و = (٠،٠) ، ٲ = (٢٧ ، ٠) ، ب = (١٢، ١٥) ، جـ = (٠، ١٢)

دالة الهدف ر = ١٠٠س + ١٥٠ ص

ر و = ١٠٠× ٠ + ١٥٠ × ٠ = ٠

ر ٲ = ١٠٠× ٢٧ + ١٥٠× ٠ = ١٨+ ١٢ = ٢٧٠٠

ر ب = ١٠٠× ١٢ + ١٥٠× ١٥ = ٣٦ + ٠ = ٣٤٥٠

ر جـ = ١٠٠× ٠ + ١٥٠× ١٢ = ٠ + ٤٨ = ١٨٠٠٠

النقطه ب (١٢، ١٥) تحقق أكبر دخل للمصنع أى عندما يكون عدد العبايات الحريمى ١٢ وعدد العبايات الرجالى ١٥

تدريب مصنع ينتج نوعين من الاثاث وكل منهما يلزم لانتاجه نوعين من الماكينات ٲ ، ب ويلزم لإنتاج وحدة الأثاث من النوع الاول لتشغيل الماكينه ٲ لمدة ساعه واحده والماكينه ب لمدة ساعتين . ويلزم لانتاج وحدة الاثاث من النوع الثانى تشغيل الماكينه ٲ لمدة ساعتين والماكينه ب لمدة ساعه واحده ، فإذا علم أن المصنع لا يعمل اكثر من ١٢ ساعه يومياً وأن ربح وحدة الاثاث من النوع الاول ٥٠ جنيهاً ومن النوع الثانى ٩٠ جنيهاً ، فما هو العدد المطلوب إنتاجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ؟

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

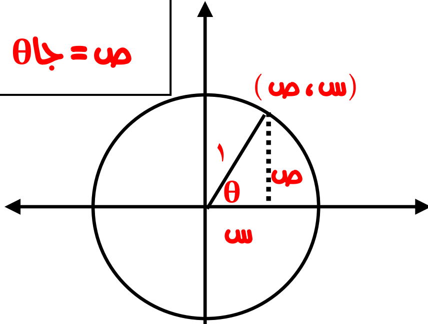
ثانياً

حساب المثلثات

الصف الأوّل الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

المتطابقات المثلثية



المتطابقات المثلثية : نذكر أن

١) جا θ = $\frac{١}{قتا}$ ، قتا θ = $\frac{١}{جا}$ ، جا θ × قتا θ = ١

٢) جتا θ = $\frac{١}{قا}$ ، قا θ = $\frac{١}{جتا}$ ، جتا θ قا θ = ١

٣) ظا θ = $\frac{١}{ظتا}$ ، ظتا θ = $\frac{١}{ظا}$ ، ظا θ ظتا θ = ١

٤) ظا θ = $\frac{جا}{جتا}$ ، ظتا θ = $\frac{جتا}{جا}$ ، ظا θ ظتا θ = ١

---

٥) جا (٩٠° − θ) = جتا θ ، جتا (٩٠° + θ) = − جا θ ، جتا (٢٧٠° − θ) = − جا θ

٦) جا (٢٧٠° − θ) = − جتا θ ، ظا (٢٧٠° − θ) = ظتا θ ، جا (٢٧٠° + θ) = − جتا θ

٧) جا (١٨٠° − θ) = جا θ ، جا (٣٦٠° − θ) = − جا θ ، جتا (١٨٠° + θ) = − جتا θ

٨) جا (− θ) = − جتا θ ، جتا (− θ) = جا θ ، ظا (− θ) = − ظتا θ

---

٩) من دائرة الوحدة س^{٢} + ص^{٢} = ١ ∴ جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١ (تسمى متطابقة فيثاغورث)

١٠) ١ + ظا^{٢}θ = قا^{٢}θ ، ١ + ظتا^{٢}θ = قتا^{٢}θ

تبسيط المقادير المثلثية : المقصود بتبسيط المقادير المثلثية هو وضعها فى أبسط صورة وذلك باستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية وطرق التحليل والأختصار والإبدال وغيرها من الخواص

مثال١ اكتب فى أبسط صورة : (جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢ جاθ جتاθ — **الحـــــــــل**

المقدار = (جاθ + جتاθ)^{٢} − ٢ جاθ جتاθ = جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ + ٢ جاθ جتاθ − ٢ جاθ جتاθ

= جا^{٢}θ + جتا^{٢}θ = ١

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ أوجد قيمة جا θ جتا θ ظا θ — الحـــــــل

المقدار = جا θ جتا θ ظا θ = جا θ جتا θ $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$ = جا² θ

مثال٣ أوجد قيمة $\frac{\text{ظا}\theta\ \text{ظتا}\theta}{\text{قا}}$ — الحـــــــل

المقدار = $\frac{\text{ظا}\theta\ \text{ظتا}\theta}{\text{قا}}$ = $\frac{1}{\text{قا}}$ = جتا θ

مثال٤ أوجد قيمة $\frac{1-\text{جا}^2}{1-\text{جتا}^2}$ — الحـــــــل

المقدار = $\frac{\text{جتا}^2}{\text{جا}^2}$ = ظتا² θ

مثال٥ أوجد قيمة جا (٩٠° – θ) قتا (٩٠° – θ) — الحـــــــل

المقدار = جا (٩٠° – θ) قتا (٩٠° – θ) = جتا θ قا θ = ١

مثال٦ إذا كان قا² θ = ٣ فإن : ظا² θ = ...

١+ ظا² θ = قا² θ ∴ ١+ ظا² θ = ٣ ظا² θ = ٢

مثال٧ إذا كان قا θ = ٢ فإن : ظا² θ = ... — الحـــــــل

١+ ظا² θ = قا² θ ∴ ١+ ظا² θ = ٤ ∴ ظا² θ = ٣

مثال٨ ابسط صوره للمقدار ٥ + ٥ ظا² θ = ؟؟؟؟ — الحـــــل ٥ (١+ظا² θ) = ٥×١=٥

مثال٩ اثبت أن : جا θ جا (٩٠° – θ) ظا θ = ١– جتا² θ — الحـــــــل

الطرف الأيمن = جا θ جا (٩٠° – θ) ظا θ = جا θ جتا θ $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$ = جا² θ = ١ – جتا² θ

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١٠ أثبت صحة المتطابقة : جا^٢^θ – جتا^٢^θ = ٢جا^٢^θ – ١ **الحـــــل**

الطرف الأيمن = جا^٢^θ – جتا^٢^θ = جا^٢^θ – (١ – جا^٢^θ)

= جاθ – ١ + جا^٢^θ = ٢جا^٢^θ – ١ = **الطرف الأيسر**

مثال ١١ أثبت أن ظاθ + ظتاθ = قاθ قتاθ **الحـــــل**

الطرف الأيمن = ظاθ + ظتاθ = $\frac{\text{جا}}{\text{جتا}}$ + $\frac{\text{جتا}}{\text{جا}}$ = $\frac{\text{جا}^2 + \text{جتا}^2}{\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}}$

= $\frac{1}{\text{جتا}\,\theta\,\text{جا}}$ = $\frac{1}{\text{جتا}}$ × $\frac{1}{\text{جا}}$ = قاθ قتاθ = **الطرف الأيسر**

مثال ١٢ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{جا}^2}{1 - \text{جتا}}$ = ١ + جتاθ **الحـــــل**

الطرف الأيمن = $\frac{\text{جا}^2}{1 - \text{جتا}}$ = $\frac{1 - \text{جتا}^2\theta}{1 - \text{جتا}}$ = $\frac{(1 - \text{جتا}\,\theta)(1 + \text{جتا}\,\theta)}{1 - \text{جتا}}$

= ١ + جتاθ = **الطرف الأيسر**

تدريب أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{جتا}^2}{1 + \text{جا}}$ = ١ – جاθ **الحـــــل**

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١٣ أثبت أن $\frac{\text{ظا جـ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{جـ}} = \text{جا جـ} \times \text{جتا جـ}$ **الحـــــل**

الطرف الأيمن $= \frac{\text{ظا جـ}}{\text{١ + ظا}^{٢}\text{جـ}} = \frac{\text{ظاجـ}}{\text{قا}^{٢}\text{جـ}} = \text{ظا جـ} \div \text{قا}^{٢}\text{جـ} = \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}} \div \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}}$

$= \frac{\text{جتا جـ}}{\text{جا جـ}} \times \text{جا}^{٢}\text{جـ} = \text{جتا جـ جا جـ}$

مثال ١٤ أثبت صحة المتطابقة : $\frac{\text{١ − ظتا}^{٢}}{\text{١ \quad ظتا}^{٢}\theta} = \text{٢ جا}^{٢}\theta − \text{١}$ **الحـــــل**

الطرف الأيمن $= \frac{\text{١ − ظتا}^{٢}}{\text{١ \quad ظتا}^{٢}\theta} = \frac{\text{١ − ظتا}^{٢}}{\text{قتا}^{٢}} = (\text{١} − \text{ظتا}^{٢}\theta) \div \text{قتا}^{٢}\theta$

$= (\text{١} − \frac{\text{جتا}^{٢}}{\text{جا}^{٢}}) \div \frac{\text{١}}{\text{جا}^{٢}}$

$= (\text{١} − \frac{\text{جتا}^{٢}}{\text{جا}^{٢}}) \times \text{جا}^{٢}\theta$

$= \text{جا}^{٢}\theta − \text{جتا}^{٢}\theta = \text{جا}^{٢}\theta − (\text{١} − \text{جا}^{٢}\theta)$

$= \text{جا}^{٢}\theta − \text{١} + \text{جا}^{٢}\theta = \text{٢ جا}^{٢}\theta − \text{١}$

مثال ١٥ أثبت صحة المتطابقة : $(\text{١} − \text{جا}\theta)(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta) = \text{جتا}\theta$ **الحـــــل**

الطرف الأيمن $= (\text{١} − \text{جا}\theta)(\text{قا}\theta + \text{ظا}\theta) = (\text{١} − \text{جا}\theta)(\frac{\text{١}}{\text{جتا}} + \frac{\text{جا}}{\text{جتا}})$

$= (\text{١} − \text{جا}\theta)(\frac{\text{١ \quad جا}}{\text{جتا}})$

$= (\frac{\text{١ \quad جا}^{٢}\theta}{\text{جتا}}) = \frac{\text{جتا}^{٢}}{\text{جتا}} = \text{جتا}\theta$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ١٦ أثبت صحة المتطابقة : $ظا^2 θ + ظتا^2 θ - (قا^2 θ + قتا^2 θ) = -2$ الحل

الطرف الأيمن = $ظا^2 θ + ظتا^2 θ - (قا^2 θ + قتا^2 θ) = ظا^2 θ + ظتا^2 θ - قا^2 θ - قتا^2 θ$

$= (ظا^2 θ - قا^2 θ) + (ظتا^2 θ - قتا^2 θ)$

$= (-1) + (-1) = -2$

مثال ١٧ أكتب فى أبسط صورة : $\frac{1}{جا^2} - \frac{1}{جتا^2}$ الحل

المقدار = $\frac{1}{جا^2} - \frac{1}{ظا^2} = قتا^2 θ - ظتا^2 θ = 1 + ظتا^2 θ - ظتا^2 θ = 1$

مثال ١٨ أكتب فى أبسط صورة : $\frac{1 - جا^2}{جتا^2 θ \quad 1}$ الحل

$\frac{1 - جا^2}{جتا^2 θ \quad 1} = \frac{جتا^2}{1 - جا^2 θ \quad 1} = \frac{جتا^2}{جا^2} = - ظتا^2 θ$

تدريب ٢ أكتب فى أبسط صورة $جا θ \ قتا θ - جتا^2 θ$ الحل

تدريب ٣ إذا كان $قا^2 θ = 5$ فإن : $ظا^2 θ = ...$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٤ القيمه العدديه للمقدار ٥ جتا θ × ٣ قا θ = ...

تدريب٥ أثبت صحة المتطابقة : $جا^٤ θ – جتا^٤ θ = ٢ جتا^٢ θ – ١$

تدريب٥ أثبت صحة المتطابقة : $ظتا^٢ θ – جتا^٢ θ = ظتا^٢ θ \; جتا^٢ θ$

تدريب٦ إذا كان ظا θ = ٢ فإن : $قا^٢ θ$ = ...

تدريب٧ القيمه العدديه للمقدار $٩ (جا^٢ θ + جتا^٢ θ)^٣ =$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان $\sqrt{2}$ جا θ − ١ = ٠ الحـــــــــل

$\sqrt{2}$ جا θ = ١ ∴ جا θ = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ موجبه (أول ، ثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{1}{\sqrt{2}}$ هى ٤٥

الربع الاول θ = ٤٥ الحــل العام هو ٤٥ + ٢π ن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥ الحــل العام هو ١٣٥ + ٢π ن

م . ح = {٤٥ ، ١٣٥}

مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٢ جتا θ − $\sqrt{3}$ = ٠ الحـــــــــل

٢ جتا θ = $\sqrt{3}$ ∴ جتا θ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ موجبه (أول ، رابع)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{3}}{2}$ هى ٣٠

الربع الاول θ = ٣٠ الحــل العام هو ٣٠ + ٢π ن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ − ٣٠ = ٣٣٠ الحــل العام هو ٣٣٠ + ٢π ن

م . ح = {٣٠ ، ٣٣٠}

مثال٢ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان قتا θ − ٢ = ٠ الحـــــــــل

قتا θ = ٢ جا θ = $\frac{1}{2}$ موجبه (أول ، ثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{1}{2}$ هى ٣٠

الربع الاول θ = ٣٠ الحــل العام هو ٣٠ + ٢π ن

، الربع الثانى = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠ الحــل العام هو ١٥٠ + ٢π ن

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب ١ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٢ جتا θ – ١ = ٠ الحـــــل

مثال ٣ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ٣ ظا θ – ١ = ٠ الحـــــل

$\sqrt{٣}$ ظا θ = ١ ظا θ = $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ موجبة (أول ، ثالث)

الزاوية التى ظلها $\frac{١}{\sqrt{٣}}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحـل العام هو ٣٠ + π ن

، الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠ الحـل العام هو ٢١٠ + π ن

م . ح = { ٣٠ ، ٢١٠ }

مثال ٤ أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان ظا θ + ١ = ٠ الحـــــل

ظا θ = –١ ظا θ = –١ سالبة (ثانى ورابع)

الزاوية التى ظلها ١ هى ٤٥

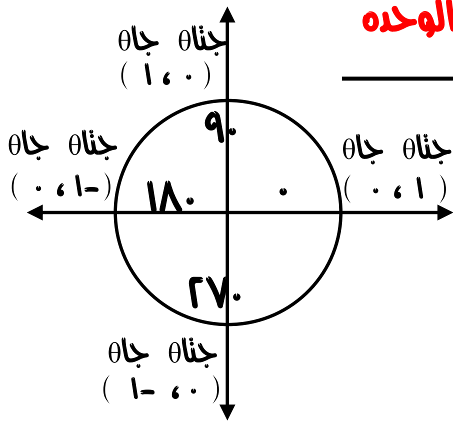
الربع الثانى θ = ١٨٠ – ٤٥ = ١٣٥ الحـل العام هو ١٣٥ + π ن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ – ٤٥ = ٣١٥ الحـل العام هو ٣١٥ + π ن

م . ح = { ١٣٥ ، ٣١٥ }

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ملحوظة : إذا كانت (جاθ ، جتاθ) = ١ أو -١ أو ٠ نستخدم دائرة الوحده



مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان جاθ -١ = ٠

الحـــــل

جاθ = ١ من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحـــل العام هو ٩٠+ ٢ π ن

مثال أوجد مجموعة الحل و الحل العام إذا كان جتاθ = ٠ الحـــــل

جتاθ = ٠ من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحـــل العام هو ٩٠+ ٢ π ن

θ = ٢٧٠ الحـــل العام هو ٢٧٠+ ٢ π ن

مثال أوجد الحل العام إذا كان ٢ جاθ جتاθ - $\sqrt{٣}$ جاθ = ٠ الحـــــل

جاθ (٢جتاθ - $\sqrt{٣}$) = ٠

إما جاθ =٠ أو ٢جتاθ - $\sqrt{٣}$ =٠

من دائرة الوحده | ٢جتاθ = $\sqrt{٣}$

إما θ =٠ الحـــل العام هو ٢ π ن | جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ موجبه (أول ورابع)

أو θ =١٨٠ الحـــل العام هو ١٨٠ + ٢ π ن | الربع الأول θ = ٣٠ الحـــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

، الربع الرابع θ = ٣٦٠ - ٣٠ = ٣٣٠

الحـــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

أ/ أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٦ أوجد الحل العام إذا كان جا θ جتا θ − $\frac{1}{2}$ جتا θ = ٠ الحــــــل

المقدار = جا θ جتا θ − $\frac{1}{2}$ جتا θ = جتا θ (جا θ − $\frac{1}{2}$) = ٠

إما جتا θ = ٠

من دائرة الوحده

θ = ٩٠ الحــل العام هو ٩٠ + ٢ π ن

θ = ٢٧٠ الحــل العام هو ٢٧٠ + ٢ π ن

أو جا θ − $\frac{1}{2}$ = ٠

جا θ = $\frac{1}{2}$ موجبه (أول و ثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{1}{2}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠ الحــل العام هو ٣٠ + ٢ π ن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

الحــل العام هو ١٥٠ + ٢ π ن

مثال٧ أوجد الحل العام إذا كان ٢ جا$^{2}\theta$ = $\sqrt{2}$ جا θ

٢ جا$^{2}\theta$ − $\sqrt{2}$ جا θ = ٠

جا θ (٢ جا θ − $\sqrt{2}$) = ٠

إما جا θ = ٠

من دائرة الوحده

إما θ = ٠ الحــل العام هو ٢ π ن

أو θ = ١٨٠ الحــل العام هو ١٨٠ + ٢ π ن

أو ٢ جا θ − $\sqrt{2}$ = ٠

جا θ = $\frac{\sqrt{2}}{2}$ موجبه (أول وثانى)

الزاويه التى جيبها $\frac{\sqrt{2}}{2}$ هى ٤٥

الربع الأول θ = ٤٥ الحــل العام هو ٤٥ + ٢ π ن

، الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

الحــل العام هو ١٣٥ + ٢ π ن

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٢ أوجد مجموعة حل المعادلة ٤ جتا^{2}θ – ٣ = ٠ الحـــــل

٤ جتا^{2}θ = ٣ جتا^{2}θ = $\frac{٣}{٤}$ جتاθ = $\sqrt{\frac{٣}{٤}}$ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$

إما جتاθ = $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (أول ورابع) أو جتاθ = – $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ (ثانى وثالث)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{\sqrt{٣}}{٢}$ هى ٣٠

الربع الأول θ = ٣٠

الربع الرابع θ = ٣٦٠ – ٣٠ = ٣٣٠

الربع الثانى θ = ١٨٠ – ٣٠ = ١٥٠

الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٣٠ = ٢١٠

م . ح = { ٣٠ ، ٣٠٠ ، ١٥٠ ، ٢١٠ }

مثال ٣ أوجد مجموعة حل المعادلة ٢ جاθ جتاθ + ٣ جتاθ = ٠ الحـــــل

جتاθ (٢ جاθ + ٣) = ٠

إما جتاθ = ٠

من دائرة الوحده

θ = ٩٠ أو ٢٧٠

مجموعة الحل = { ٩٠ ، ٢٧٠ }

أو ٢ جاθ + ٣ = ٠

جاθ = $\frac{-٣}{٢}$ مرفوض

مثال ٤ أوجد مجموعة حل المعادلة ٣ قتاθ + ٢ = ٠ ، θ]٠ ، ٢π[الحـــل

٣ قتاθ + ٢ = ٠ ∴ ٣ قتاθ = – ٢

قتاθ = $\frac{-٢}{٣}$

جاθ = $\frac{-٣}{٢}$ = – ١.٥ مرفوض ∴ مجموعة الحل = ∅

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال أوجد مجموعة حل المعادلة قا θ + $\sqrt{٢}$ = ٠ ، θ ∈] ٠ ، ٢π [الحل

قا θ = − $\sqrt{٢}$ ∴ جتا θ = − $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ (ثانى وثالث)

الزاويه التى جيب تمامها $\frac{١}{\sqrt{٢}}$ هى ٤٥

الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٤٥ = ١٣٥

الربع الثالث θ = ١٨٠ + ٤٥ = ٢٢٥ مجموعة الحل = {١٣٥ ، ٢٢٥}

مثال٦ أوجد مجموعة الحل إذا كان ٢ جا^{٢}θ + جا θ − ١ = ٠ الحل

(جا θ + ١) (٢جا θ − ١) = ٠

جا θ + ١

٢جا θ − ١

إما جا θ + ١ = ٠ أو ٢جا θ − ١ = ٠

جا θ = −١ | جا θ = $\frac{١}{٢}$ موجبه (أول والثانى)

من دائرة الوحده | الربع الأول θ = ٣٠

θ = ٢٧٠ | الربع الثانى θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

مثال٧ أوجد الحل العام إذا كان جا θ = جتا θ الحل

جا θ = جتا θ بالقسمة على جتا θ للطرفين

$\frac{جا\ θ}{جتا\ θ} = \frac{جتا\ θ}{جتا\ θ}$

ظا θ = ١ موجبه (أول وثالث) الزاويه التى ظلها ١ هى ٤٥ أكمل

تدريب٢ أوجد الحل العام إذا كان جتا θ − $\sqrt{٣}$ جا θ = ٠

تدريب٣ أوجد الحل العام إذا كان ٢جا θ − $\sqrt{٣}$ = ٠

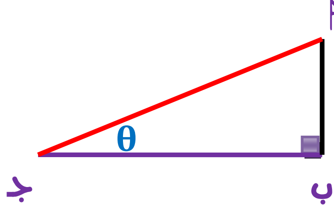
تدريب٣ أوجد الحل العام إذا كان ٢جا θ جتا θ − $\sqrt{٣}$ جا θ = ٠

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

حل المثلث القائم الزاوية

حل المثلث القائم الزاوية : يعنى ايجاد اطوال اضلاعه الثلاثة وقياسات زواية الثلاثة

تذكر أن :



ﻫ جـ = $\sqrt{(ﻫ\ ب)^2 + (ب\ جـ)^2}$

، ب جـ = $\sqrt{(ﻫ\ ب)^2 + (ب\ جـ)^2}$

، جا θ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{وتر}} = \frac{ﻫ\ ب}{ﻫ\ جـ}$

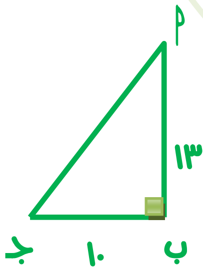
، جتا θ = $\frac{\text{مجاور}}{\text{وتر}} = \frac{ب\ جـ}{ﻫ\ جـ}$ ، ظا θ = $\frac{\text{مقابل}}{\text{مجاور}} = \frac{ﻫ\ ب}{ب\ جـ}$

أولاً حل المثلث إذا علم منه طولا ضلعين وزاوية :

فيكون المطلوب هو ايجاد الضلع الثالث وقياس الزاويتان الأخريان

مثال حل المثلث ﻫ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ﻫ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٠ سم

الحـــــل (ضلعان وزاويه) المطلوب (زاويتان وضلع)



ﻫ جـ = $\sqrt{(١٣)^2 + (١٠)^2}$ = ١٦.٤ سم

ظا جـ = $\frac{١٣}{١٠}$ ∴ ق (∠ جـ) = ٥٢° ٢٥ َ ٥٣ ً

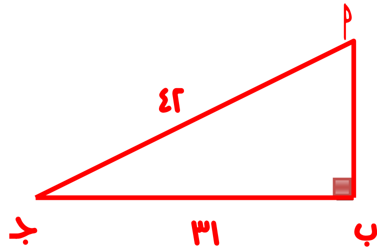
ظا ﻫ = $\frac{١٠}{١٣}$ ∴ ق (∠ ﻫ) = ٣٧° ٣٤ َ ٦ ً

تدريب ١ حل المثلث ﻫ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ﻫ ب = ٤ سم ، ب جـ = ٦ سم **الحـــــل**

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ٱ ب = ١٣سم ، ب جـ = ١٠ سم

الحــــــــل (ضلعان وزاويه) المطلوب (زاويتان وضلع)



ٱ ب = $\sqrt{(٤٢)^٢ - (٣١)^٢}$ = ٢٨ سم

جتا جـ = $\frac{٣١}{٤٢}$ ∴ ق (∠ جـ) = ٤٢ ′٢٥ °

جا ٱ = $\frac{٣١}{٤٢}$ ∴ ق (∠ٱ) = ٤٧ ′٣٤ °

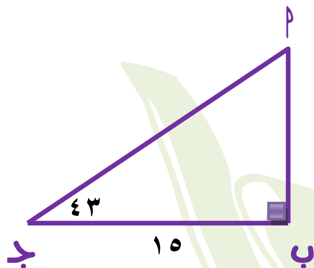
ثانياً حل المثلث إذا علم منه قياس زاويتان و ضلع :

فيكون المطلوب هو ايجاد الزاوية الثالثة وطولا الضلعين الأخريان

مثال٢ حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ق (∠ جـ) = ٤٣° ، ب جـ = ١٥سم

الحــــــــل (زاويتان و ضلع) المطلوب (ضلعان و زاوية)

ق (∠ٱ) = ١٨٠ − (٩٠ + ٤٣) = ٤٧°

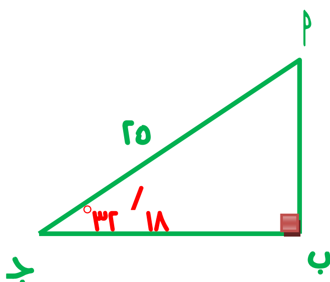


، ظا ٤٣ = $\frac{ٱ ب}{١٥}$ ٱ ب = ١٥ × ظا ٤٣ = ١٣.٩٩سم

، جتا ٤٣ = $\frac{١٥}{ٱ جـ}$ ٱ جـ = $\frac{١٥}{جتا ٤٣}$ = ٢٠.٥سم

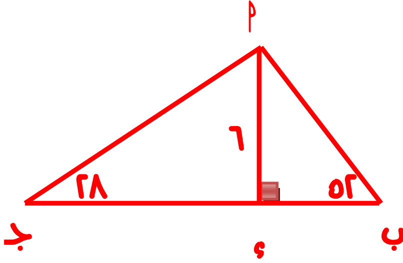
تدريب٢ حل المثلث ٱ ب جـ القائم الزاوية فى ب والذى فيه : ق (∠ جـ) = ١٨ ′٣٢ ° ، ٱ جـ = ٢٥سم

الحــــــــل (زاويتان و ضلع) المطلوب (ضلعان و زاوية)



مثال ٣ أ ب جـ مثلث رسم $\overline{أ ء} \perp \overline{ب جـ}$ ، أ ء = ٦سم ، ق (∠ ب) = ٥٢°

، ق (∠ جـ) = ٢٨° أوجد طول $\overline{ب جـ}$ لأقرب سنتيمتر الحــــــــــل



فى المثلث أ ب ء

ظا ٥٢ = $\frac{٦}{ب ء}$ ب ء = $\frac{٦}{ظا ٥٢}$ = ٤.٦٩ سم

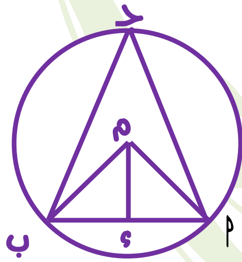
فى المثلث أ جـ ء

ظا ٢٨ = $\frac{٦}{ء جـ}$ ء جـ = $\frac{٦}{ظا ٢٨}$ = ١١.٢٨ سم

ب جـ = ٤.٦٩ + ١١.٢٨ = ١٥.٩٧ ≈ ١٦سم

للمتفوقين دائرة م طول نصف قطرها ٨سم ، رسم فيها وتر يقابل زاوية محيطيه قياسها ٥٦°

أوجد طول هذا الوتر الحــــــــــل



ق (∠ أ م ب) = ٢ ق (∠ أ جـ ب) محيطيه ومركزية مشتركان فى نفس القوس

= ٢ × ٥٦ = ١١٢°

نرسم $\overline{م ء} \perp \overline{أ ب}$ ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، م ء ينصف ∠ أ م ب

ق (∠ أ م ء) = $\frac{١١٢}{٢}$ = ٥٦

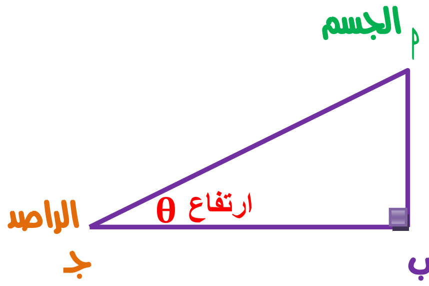
فى المثلث أ م ء جا (∠ أ م ء) = $\frac{مقابل}{وتر}$ = $\frac{أ ء}{أ م}$

جا ٥٦ = $\frac{أ ء}{٨}$ أ ء = ٨ × جا ٥٦ = ٦.٦٣سم

طول الوتر أ ب = ٢ × ٦.٦٣ = ١٣.٢٦سم

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

زوايا الأرتفاع والإنخفاض

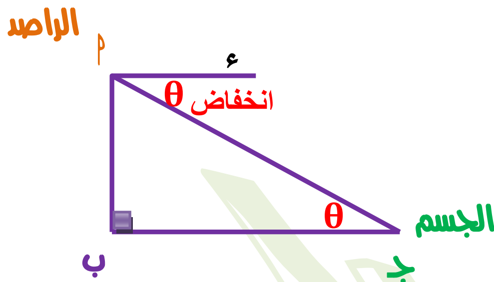


زاوية الإرتفاع :

بفرض أن الراصد يقف عند النقطه جـ

والجسم المرصود عند نقطة م

فإن زاوية إرتفاع الجسم هى θ



زاوية الإنخفاض :

بفرض أن الراصد يقف عند النقطه م

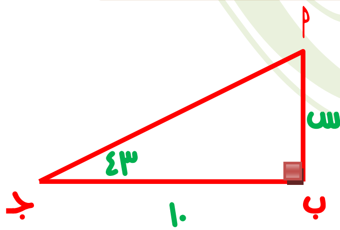
والجسم المرصود عند نقطة جـ

فإن زاوية إنخفاض المبنى هى θ

ويلاحظ أن ق (∠ ء م جـ) = ق (∠ م جـ ب) بالتبادل

مثال ١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠ متر من قاعدة سارية علم رصد شخص قمة السارية فوجدها ٤٣° أوجد ارتفاع سارية العلم لأقرب متر الحـــــــــل

من الشكل المقابل



ظا ٤٣° = $\frac{\text{س}}{١٠}$

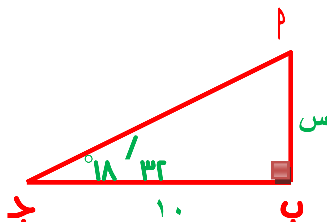
س = ١٠ × ظا ٤٣°

س = ٩.٣ ≈ ٩ متر

ارتفاع سارية العلم = ٩ متر

مثال ٢ من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية إرتفاع المنزل هى ١٨° ٣٢′

أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر الحـــــــــل

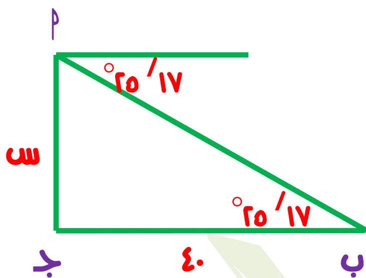


ظا ١٨° ٣٢′ = $\frac{\text{س}}{٥٠}$

س = ٥٠ × ظا ١٨° ٣٢′ = ١٦.٧٦٢

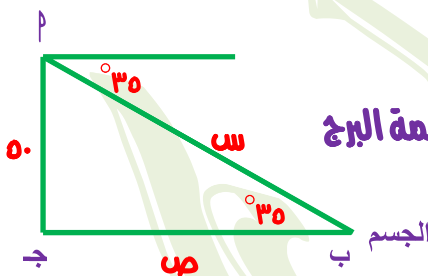
أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب ١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ٥٠ متر من قاعدة منزل وجد أن قياس زاوية إرتفاع المنزل هى ٢٦ ′ ٣٨° أوجد ارتفاع المنزل لأقرب متر الحــــــــل



مثال ٢ من أعلى نقطة من مبنى منزل رصد شخص سيارة تقف على الأرض فوجد أن قياس زاوية إنخفاضها ١٧ ′ ٢٥° فإذا كان بعد السيارة عن قاعدة المنزل ٤٠متر أوجد ارتفاع المنزل الحــــل

ظا ١٧ ′ ٢٥° = $\frac{\text{س}}{٤٠}$ س = ٤٠ × ظا ١٧ ′ ٢٥° = ١٨.٨٩ متر



مثال ٢ من قمة برج ارتفاعه ٥٠متر وجد أن قياس زاوية إنخفاض جسم فى المستوى الافقى المار بقاعدة البرج هى ٣٥° أوجد بعد الجسم من قمة البرج ثم أوجد بعد الجسم من قاعدة البرج الحــــــــل

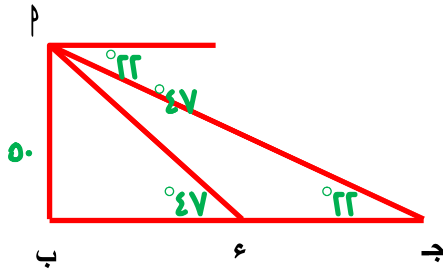
جا ٣٥ = $\frac{٥٠}{\text{س}}$ س = $\frac{٥٠}{\text{جا ٣٥}}$ = ٨٧.١٧ متر بعد الجسم من قمة البرج

ظا ٣٥ = $\frac{٥٠}{\text{ص}}$ ص = $\frac{٥٠}{\text{ظا ٣٥}}$ = ٧١.٤ متر بعد الجسم من قاعدة البرج

تدريب ٢ رصد شخص على صخره ارتفاعها ١٠٠ متر سياره واقفه على الطريق فكان قياس زاوية انخفاضها ٢٥° أوجد لاقرب متر بعد الراصد عن السياره الحـــــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال من قمة منزل إرتفاعه ٥٠ مترا لاحظ شخص سيارتين على شعاع واحد من قاعدة المنزل وجد أن قياسى زاويتى إنخفاضيهما ٢٢° ، ٤٧° أوجد البعد بين السيارتين لأقرب متر



الحـــــــل

فى Δ م جـ ب ظا ٢٢° = $\frac{٥٠}{جـ ب}$

جـ ب = $\frac{٥٠}{ظا ٢٢}$ = ١٢٣.٨ متر

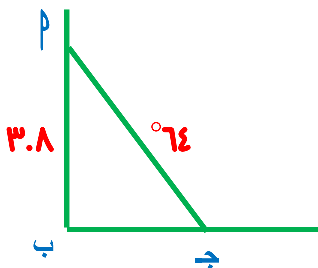
فى Δ م ء ب ظا ٤٧° = $\frac{٥٠}{ب ء}$

ب ء = $\frac{٥٠}{ظا ٤٧}$ = ٤٦.٦ متر

جـ ء = ١٢٣.٨ – ٤٦.٦ = ٧٧.٢ متر

تدريب ٣ من قمة صخره ارتفاعها ١٣٠ متر ولاحظ سفينتين فى البحر على شعاع واحد من قاعدة الصخره فوجد أن قياس زاويتى إنخفاضهما هو ٢٨° ، ٥١° أوجد البعد بين السفينتين الحـــــل

مثال٦ سلم يستند بأحد طرفيه على حائط رأسى ، يرتفع عن سطح الأرض ٣.٨ متر والطرف السفلى على الأرض وقياس زاوية ميل السلم عن الأرض ٦٤° أوجد لأقرب رقمين عشريين ١) بعد الطرف السفلى عن الحائط ٢) طول السلم



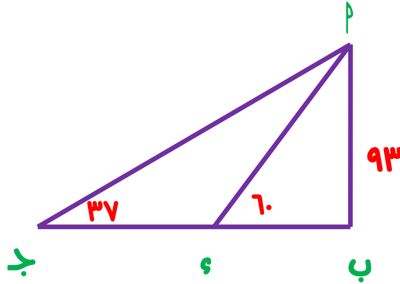
الحـــــل ظا ٦٤° = $\frac{٣.٨}{ب جـ}$ ب جـ = $\frac{٣.٨}{ظا ٦٤}$ = ١.٨٥ متر

جا ٦٤° = $\frac{٣.٨}{م جـ}$ م جـ = $\frac{٣.٨}{جا ٦٤}$ = ٤.٢٣ متر

مثال ٤ من نقطة على سطح الأرض رصدت زاوية ارتفاع قمة برج فوجد أن قياسها ٣٧° وبما سار الراصد مسافة ما فى المستوى الأفقى نحو قاعدة البرج وجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٦٠°

فإذا كان ارتفاع البرج ٩٣ متر أوجد المسافه الافقيهالتى سارها الراصد لأقرب متر

الحــــــــل



فى Δ م ب جـ

ظا ٣٧° = $\frac{٩٣}{ب جـ}$ ب جـ = $\frac{٩٣}{ظا ٣٧}$ = ١٢٣.٤ متر

فى Δ م ب ء

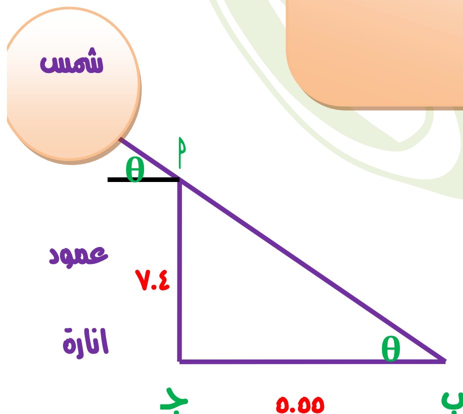
ظا ٦٠° = $\frac{٩٣}{ب ء}$ ب ء = $\frac{٩٣}{ظا ٦٠}$ = ٥٣.٧

جـ ء = ١٢٣ – ٥٣.٧ = ٦٩.٧ متر

مثال ٣ عمود انارة ارتفاعه ٧.٤ متر يلقى ظلاً على الارض طوله ٥.٥٥ متراً

أوجد بالرديان قياس زاوية ارتفاع الشمس عندئذ .

الحــــــل



θ هى زاوية ميل الشمس

ظاθ = $\frac{٧.٤}{٥.٥٥}$ θ = ٥٣° ٧/ ٤٨//

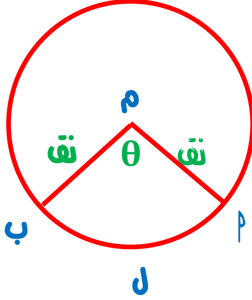
θ بالرديان = ٥٣° ٧/ ٤٨// $\frac{}{١٨٠}$ = ٠.٩٢٧ ء

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

القطاع الدائرى

القطاع الدائرى : هو جزء من سطح دائره محدد بقوس وبنصف قطرين هما طرف هذا القوس

قوانين القطاع الدائرى :



مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ θ° نق² — إذا كانت الزاويه المعطاه بالتقدير الدائرى

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{1}{2}$ ل نق — إذا كان المعطى طول القوس

مساحة القطاع الدائرى = $\frac{س}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة — إذا كانت الزاويه المعطاه بالتقدير الستينى

محيط القطاع = ل + ٢نق

ملحوظه مساحة الدائره = π نق² محيط الدائره = ٢ π نق

مثال أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٧ سم وزاويته المركزيه ٢.١°

الحـــــل

م = ؟

نق = ٧ سم

θ° = ٢.١°

م القطاع = $\frac{1}{2}$ θ° نق²

= $\frac{1}{2}$ × ٢.١ × (٧)² = ٥١.٤ سم²

تدريب أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٨سم وزاويته المركزيه ١.٤°

الحـــــل

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٦.٥ سم وطول قوسه ٨سم ثم أوجد محيطه

الحـــــل

م = ؟

نق = ٦.٥ سم

ل = ٨سم

م القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ٨ × ٦.٥ = ٢٦سم^{٢}

محيط القطاع = ل + ٢نق = ٨+ ٢×٦.٥ = ٢١ سم

مثال ٣ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٧ سم وزاويته المركزيه ٦٠°

الحـــــل

م = ؟

نق = ٧ سم

س = ٦٠°

م القطاع = $\frac{س}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة

= $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × π نق^{٢} = $\frac{٦٠}{٣٦٠}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)^{٢} = = ٢٥.٧ سم^{٢}

تدريب ٢ أوجد مساحة القطاع الدائرى الذى طول نصف قطر دائرته ٢١ سم وزاويته المركزيه ١٢٠°

الحـــــل

مثال ٤ أوجد محيط القطاع الدائرى الذى مساحته ١٨ سم^{٢} وطول قوسه ٦سم

الحـــــل

المحيط = ؟

مساحة القطاع = ١٨ سم^{٢}

ل = ٦سم

مساحة القطاع الدائرى = ١٨

$\frac{١}{٢}$ ل نق = ١٨

$\frac{١}{٢}$ × ٦ × نق = ١٨

٣ نق = ١٨ نق = ٦ سم

المحيط = ل + ٢نق = ٦ + ٢×٦ = ٦+١٢ = ١٨سم

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٥ قطاع دائرى محيطه ٢٤سم وطول قوسه ١٠ سم أوجد مساحة سطح القطاع ومساحة الدائره التى تحوى هذا القطاع

الحـــــــــل

محيط القطاع = ٢٤ سم

ل = ١٠سم

المحيط = ٢٤

ل + ٢نق = ٢٤

١٠ + ٢نق = ٢٤

٢نق = ٢٤ – ١٠

٢نق = ١٤ نق = $\frac{١٤}{٢}$ = ٧سم

مساحة سطح القطاع = $\frac{١}{٢}$ ل نق = $\frac{١}{٢}$ × ١٠ × ٧ = ٣٥ سم٢

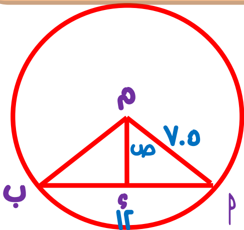
مساحة الدائره = π نق٢ = $\frac{٢٢}{٧}$ × (٧)٢ = ١٥٤ سم٢

تدريب ٣ قطاع دائرى محيطه ٤٠ سم وطول نصف قطر دائرته ١٥ سم أوجد مساحة سطح القطاع

الحـــــــــل

مثال ٦ دائره م طول نصف قطرها ٧.٥ سم ، رسم فيها نصف القطرين م أ ، م ب بحيث أ ب = ١٢سم

أوجد مساحة سطح القطاع الأصغر م أ ب لاقرب سم٢ الحـــــــــل



من الشكل المقابل نحاول إيجاد لزاويه المركزيه أ م ب

فى المثلث أ م ء فيه أ ء = ٦سم

جاص = $\frac{٦}{٧.٥}$ ∴ ق (د ص) = ٤٨ ″ ٧ ′ ٥٣° ∴ ق (د أ م ب) = ٣٦ ″ ١٥ ′ ١٠٦°

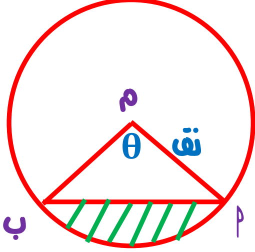
م القطاع = $\frac{س}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة = $\frac{٣٦ \quad ١٥ \quad ١٠٦}{٧.٥}$ × π نق٢ = $\frac{٣٦ \quad ١٥ \quad ١٠٦}{٧.٥}$ × $\frac{٢٢}{٧}$ (٧)٢ = ٥٢

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

القطعه الدائريه

القطعه الدائريه : هو جزء من سطح دائره محدد بقوس من دائره ووترا مارا بنهايتى ذلك القوس

قوانين القطعه الدائريه :



١) مساحة القطعه الدائريه = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} - جا θ^{ء})

إذا كانت الزاويه المركزيه بالتقدير الدائرى ويجب تحويل الاله للرديان

٢) مساحة القطعه الدائريه = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (س × $\frac{ }{١٨٠}$ - جا س)

إذا كانت الزاويه المركزيه بالتقدير الستينى

ملاحظه : التحويل من دائرى لستينى والعكس

$\frac{θ^{ء}}{ } = \frac{س}{١٨٠}$

ملاحظه لإيجاد مساحة القطعه الكبرى = مساحة الدائره - مساحة القطعه الصغرى

مثال١ أوجد مساحة القطعه الدائريه التى طول قطرها ١٦سم وقياس زاويتها المركزيه ١٢٠°

الحـــــل

م = ؟

نق = ٨سم

س = ١٢سم

م = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (س × $\frac{ }{١٨٠}$ - جا س)

= $\frac{١}{٢}$ (٨)^{٢} (١٢٠ × $\frac{ }{١٨٠}$ - جا ١٢٠) = ٣٢ (١.٢٢٨) = ٣٩.٣ سم^{٢}

مثال٢ أوجد مساحة القطعه الدائريه التى طول نصف قطرها ٨سم وقياس زاويتها المركزيه ٢.٠٢^{ء}

الحـــــل

م = ؟

نق = ٨سم

θ^{ء} = ٢.٠٢^{ء}

م = $\frac{١}{٢}$ نق^{٢} (θ^{ء} - جا θ^{ء})

= $\frac{١}{٢}$ (٨)^{٢} (٢.٠٢^{ء} - جا ٢.٠٢^{ء}) = ٣٢ (١.١٢) = ٣٥.٨٤ سم^{٢}

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب١ أوجد مساحة القطعة الدائرية التى طول نصف قطرها ١٢سم وقياس زاويتها المركزية ١٥٠°

الحـــــــل

مثال٢ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ١٠ سم وطول قوسها ٢٦.١٩ سم أوجد مساحة هذه القطعة

الحـــــــل

ل = ١٠سم

نق = ١٠سم

$\theta^{ء} = \frac{ل}{نق} = \frac{26.19}{10} = 2.619$

$م = \frac{1}{2}$ نق^2 $(\theta^{ء} -$ جا $\theta^{ء})$

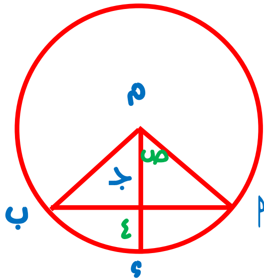
$= \frac{1}{2} (10)^2$ $(2.619^{ء} -$ جا $2.619^{ء})$ = ٥٠ (٢.١٢) = ١٠٦ سم^2

تدريب٢ قطعة دائرية طول نصف قطر دائرتها ٨ سم وطول قوسها ١٣ سم أوجد مساحة هذه القطعة

الحـــــــل

مثال٣ أوجد مساحة قطعة دائرية إرتفاعها ٤سم وطول نصف قطر دائرتها ٧سم

الحـــــــل



من الشكل القابل م جـ = ٧ - ٤ = ٣ سم

، جتا (حـ ص) = $\frac{3}{7}$ ∴ ق (حـ ص) = ٣٧ ٦٤ /°

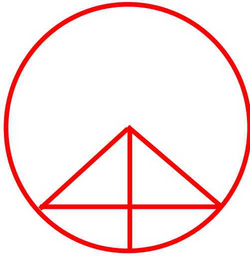
ق (حـ أ م ب) = ٢ × ٣٧ ٦٤ /° = ١٥ ١٢٩ /°

$م = \frac{1}{2}$ نق^2 (س × $\frac{\pi}{180}$ - جا س) = $\frac{1}{2}(7)^2$ (١٥ ١٢٩ /° × $\frac{\pi}{180}$ - جا ١٥ ١٢٩ /°) = ٢٤.٥ (١.٤٨) = ٣٦.٢٦

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب ٣ أوجد مساحة قطعة دائرية إرتفاعها ٤سم وطول نصف قطر دائرتها ٨سم

الحـــــل



مثال ٤ وتر فى دائره طوله ٨سم على بعد ٣سم من مركزها ، أوجد مساحة القطعة الدائري الصغرى الحادثه من تقاطع هذا الوتر مع سطح الدائره

الحـــــل

من الشكل القابل أ ء = ٤سم

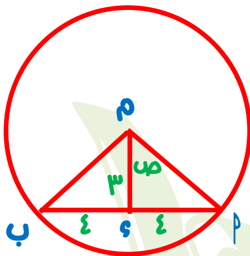
فى المثلث أ م ء

أ م = $\sqrt{١٦ + ٩}$ = ٥ نق = ٥سم

، ظا (د ص) = $\frac{٤}{٣}$ ∴ ق (د ص) = ٨′ ٥٣°

ق (د أ م ب) = ٢ × ٨′ ٥٣° ١٠٦°

م = $\frac{١}{٢}$ نق٢ (س × $\frac{ط}{١٨٠}$ - جا س) = $\frac{١}{٢}$ (٥)٢ (١٠٦° × $\frac{ط}{١٨٠}$ - جا ١٠٦°) = ٢٤.٥ (١.٤٨) = ١١.١ سم٢



تدريب ٤ $\overline{أ ب}$ وتر فى دائره طوله ١٠سم يقابل زاويه مركزيه قياسها ٦٠ أوجد مساحة القطعة الكبرى التى وترها $\overline{أ ب}$

الحـــــل

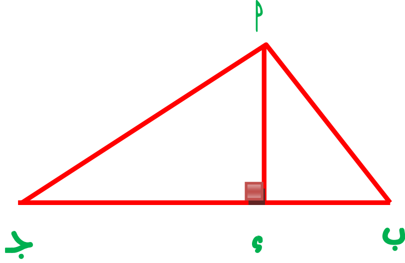
أ/ أحمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المساحات

مساحة المثلث بمعلومية طول القاعده والارتفاع

م Δ = $\frac{1}{2}$ طول القاعده فى الارتفاع

فى الشكل المقابل :

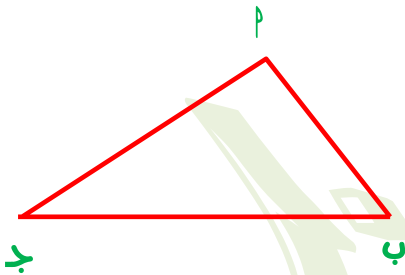


م Δ ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ × ا ء

مساحة المثلث بمعلومية طول ضلعين والزاويه المحصوره بينهما

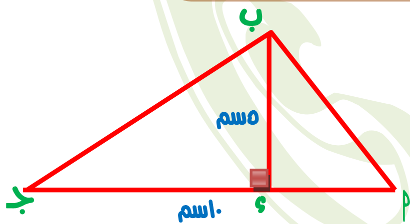
م Δ = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب الضلعين × الزاويه المحصوره بينهما

فى الشكل المقابل :



م Δ ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا جـ × جا ا

مثال١ أحسب مساحة المثلث ا ب جـ الذى فيه ا جـ = ١٠سم وطول العمود المرسوم من ب على ا جـ يساوى ٥سم الحـــــــل



م Δ ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ا جـ × ب ء

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ٥ = ٢٥سم٢

مثال٢ أحسب مساحة المثلث ا ب جـ الذى فيه ا ب = ٧سم ، ا جـ = ١٠سم ، ق (حـ ا) = ٥٠° لأقرب رقمين عشريين الحـــــــل

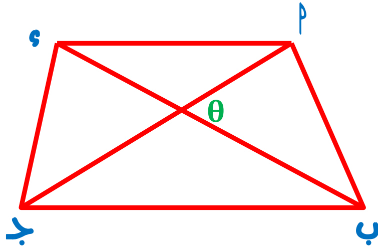
م Δ ا ب جـ = $\frac{1}{2}$ ا ب × ا جـ × جا ا = $\frac{1}{2}$ ٧ × ١٠ × جا ٥٠ ٢٦.٨١ سم٢

تدريبا أحسب مساحة المثلث ا ب جـ الذى فيه ا ب = ٤سم ، ا جـ = ١١سم ، ق (حـ ا) = ٧٨° لأقرب رقمين عشريين الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مساحة الشكل الرباعى :

فى الشكل المقابل :



م الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاويه المحصوره بينهما

م الشكل م ب جـ ء = $\frac{1}{2}$ م جـ × ب ء × جاθ

مثال١ أحسب مساحة الشكل الرباعى الذى فيه طولا قطريه ١٠ سم ، ١٤سم

، قياس الزاويه المحصوره بينهما ٦٥° لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــــل

م الشكل الرباعى = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين × جيب الزاويه المحصوره بينهما

= $\frac{1}{2}$ × ١٠ × ١٤ × جا٦٥ = ٦٣.٤٤ سم٢

تدريب٢ أحسب مساحة الشكل الرباعى الذى فيه طولا قطريه ١٨ سم ، ١٣سم

، قياس الزاويه المحصوره بينهما ٧٤° لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــــل

تذكر أن : المربع والمعين قطراهما متعامدان

م المربع = $\frac{1}{2}$ مربع طول قطر

، م المعين = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مساحة المضلع المنتظم :

المضلع المنتظم هو المضلع الذى تتساوى جميع أضلاعه وجميع زواياه

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{}{ن}$ حيث ن عدد الاضلاع ، س طول الضلع

مثال   أوجد مساحة المضلع الخماسى الذى طول ضلعه ١٠ سم لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــــل

مساحة المضلع المنتظم = $\frac{1}{4}$ ن س^2 ظتا $\frac{}{ن}$

= $\frac{1}{4}$ × ٥ × $(١٠)^2$ ظتا $\frac{١٨٠}{٥}$ = ١٧٢٫٠٥ سم^2

تدريب٢   أوجد مساحة المضلع الثمانى الذى طول ضلعه ١٦سم لاقرب رقمين عشريين

الحـــــــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ثالثاً

الهندسة

الصف الأول الثانوى

الفصل الدراسى الثانى

الكميات القياسية والكميات المتجهة

الكمية القياسية : هى كمية تتعين تماماً بمعرفة مقدارها فقط مثل (الطول – الزمن – درجة الحرارة)

الكمية المتجهة : هى كمية تتعين تماماً بمعرفة مقدارها واتجاهها مثل (الإزاحة – القوة – السرعة)

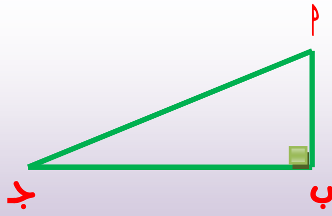
المسافة : هى المسار الفعلى للجسم

الأزاحة : المسافة المقطوعة فى زمن معين (وهى أقصر بعد بين نقطتين)

مثال١ **فى الشكل المقابل :**

تحرك جسم من ٢ إلى ب ثم غير اتجاهه الى جـ

أوجد المسافة والإزاحة أثناء الحركة الحـــــــــل



المسافة = ٢ ب + ب جـ = ٥ + ١٣ = ١٨متر

الأزاحة = ٢جـ = $\sqrt{25 + 144}$ = ١٣متر فى أتجاه $\overleftarrow{٢جـ}$

القطعة المستقيمة الموجهة : هى قطعة مستقيمة لها نقطة بداية ونقطة نهاية واتجاه .

فى الشكل المقابل :



القطعة المستقيمة $\overline{٢ ب}$ أو $\overline{ب ٢}$ القطعة المستقيمة الموجهة $\overleftarrow{٢ ب}$

معيار المتجه : هو طول $\overleftarrow{٢ ب}$ ويرمز لها بالرمز $\| \overleftarrow{٢ ب} \|$

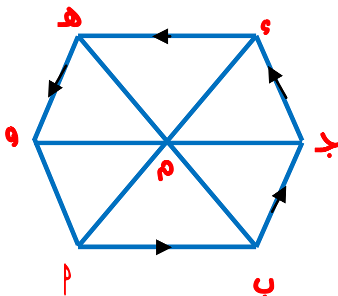
تتكافئ القطعتان المستقيمتان إذا كان : أ) لهما نفس الطول ب) لهما نفس الإتجاه

مثال٢ **فى الشكل المقابل :** ٢ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٦ سم

فإذا تحرك الجسم من ٢ الى ب ثم جـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند و

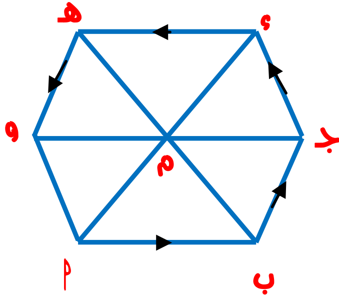
أوجد المسافة المقطوعة ....٣٠سم..........

الإزاحة ....٦سم.......... وفى اتجاه ....$\overleftarrow{٢ و}$..........



١) $\overleftarrow{٢ ب}$ تكافئ ..$\overleftarrow{وم}$.. ، تكافئ ..$\overleftarrow{مجـ}$.. ، تكافئ ..$\overleftarrow{هـء}$.. ٢) $\overleftarrow{م ء}$ تكافئ ..$\overleftarrow{جـب}$.. ، تكافئ ..$\overleftarrow{وهـ}$.. ، تكافئ ..$\overleftarrow{٢م}$..

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩



مثال ٢ فى الشكل المقابل : أ ب جـ ء هـ و شكل سداسى منتظم طول ضلعه ٥ سم

فإذا تحرك الجسم من أ الى ب ثم جـ ثم ء ثم هـ وتوقف عند و

أوجد المسافة المقطوعة ....

الإزاحة .... وفى اتجاه ....

١) $\overleftarrow{\text{ب أ}}$ تكافئ .... ، تكافئ ....، تكافئ .... ٢) $\overleftarrow{\text{ء م}}$ تكافئ .... ، تكافئ ....، تكافئ ....

مثال ٣ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (-٣، ١) ، $\overleftarrow{\text{جـ}}$ = (٥، -١) وكان أ ب يكافئ المتجه جـ ء

أوجد $\overleftarrow{\text{ء}}$

الحـــــــــــل

أ ب = جـ ء

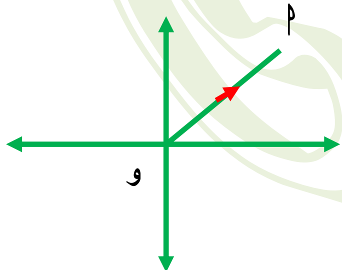
ب - أ = ء - جـ

(-٣، ١) - (٢، ٣) = ء - (٥، -١)

(-٥، -٢) = ء - (٥، -١) ء = (-٥، -٢) + (٥، -١)

ء = (٠، -٣)

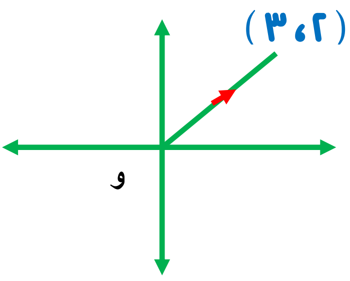
المتجهات



أولاً متجه الموضع :

لأى نظام أحداثى متعامد فإن متجه الموضع $\overleftarrow{\text{و أ}}$ هو

المتجه الذى نقطة بدايته نقطة الأصل ونهايته النقطه أ ويرمز له بالرمز $\overleftarrow{\text{أ}}$



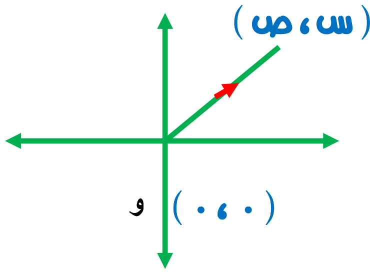
فى الشكل المقابل :

$\overleftarrow{\text{و أ}}$ = (٢، ٣) وتكتب $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٢، ٣)

المتجه الذى نقطة بدايته (٠، ٠) ونهايته (٢، ٣)

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

لإيجاد معيار متجه الموضع



فى الشكل المقابل :

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(\text{س} - ٠)^{٢} + (\text{ص} - ٠)^{٢}}$

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\text{س}^{٢} + \text{ص}^{٢}}$

مثال ١ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٥ ، ١٢)$ أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ **الحـــــل**

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٥)^{٢} + (١٢)^{٢}} = \sqrt{٢٥ + ١٤٤} = \sqrt{١٦٩} = ١٣$

مثال ٢ إذا كان $\overrightarrow{\text{أ}} = (٣ ، -٤)$ أوجد $\|\overrightarrow{\text{أ}}\|$ **الحـــــل**

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{(٣)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{٩ + ١٦} = \sqrt{٢٥} = ٥$

متجه الوحدة : هو المتجه الذى معياره يساوى الوحده

مثال ٣ أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = \left(\frac{٣}{٥} ، \frac{٤}{٥}\right)$ **الحـــــل**

$\|\overrightarrow{\text{أ}}\| = \sqrt{\frac{٩}{٢٥} + \frac{١٦}{٢٥}} = ١$

المتجه الصفرى : هو المتجه الذى معياره يساوى صفر

مثال ٤ أوجد معيار المتجه $\text{و} = (٠ ، ٠)$ **الحـــــل**

$\|\overrightarrow{\text{و}}\| = \sqrt{٠ + ٠} = ٠$

تمرين أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = (٦ ، ٨)$

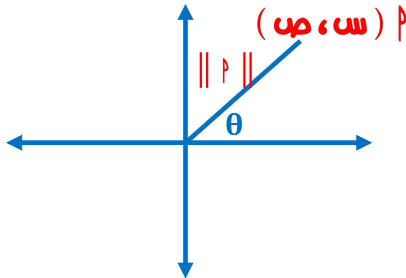
تمرين أوجد معيار المتجه $\overrightarrow{\text{أ}} = \left(\frac{-٣}{٢} ، \frac{١}{٢}\right)$

الصور المختلفه للمتجه $\vec{أ}$

أولاً الصوره الإحداثيه للمتجه $\vec{أ}$: هى (س ، ص)   مثال ⟵ (٢ ، ٣)

ثانياً الصوره القطبيه للمتجه $\vec{أ}$ الذى يصنع زاويه θ : هى ($\|\vec{أ}\|$ ، θ)   مثال ⟵ (٣ ، ٣٠°)

هام التحويل من الصوره القطبيه للصوره الاحداثيه :



فى الشكل المقابل :

س = المعيار × جتا θ = $\|\vec{و أ}\|$ جتا θ

، ص = المعيار × جتا θ = $\|\vec{و أ}\|$ جا θ

مثال إذا كان $\vec{أ}$ = (١٠ $\sqrt{٣}$ ، ٦٠°) أوجد الصوره الاحداثيه   الحـــــــل

س = ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا ٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$

ص = ١٠ $\sqrt{٣}$ جا ٦٠ = ١٥   الصوره الاحداثيه هى $\vec{أ}$ = (٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥)

مثال إذا كان $\vec{أ}$ = (٢٤ ، ١٥٠°) أوجد الصوره الاحداثيه   الحـــــــل

س = ٢٤ جتا ١٥٠ = ـ ١٢ $\sqrt{٣}$

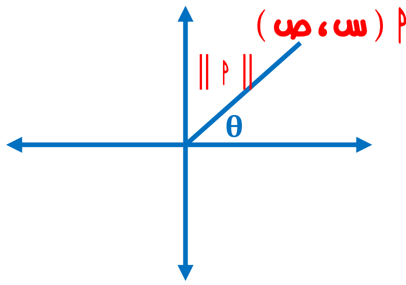
ص = ٢٤ جا ١٥٠ = ١٢   الصوره الاحداثيه هى $\vec{أ}$ = (ـ١٢ $\sqrt{٣}$ ، ١٢)

تدريب إذا كان $\vec{أ}$ = (٤ ، ٣٠°) أوجد الصوره الاحداثيه   الحـــــــل

تدريب٢ إذا كان أ = (١٢ $\sqrt{٢}$ ، $\frac{٣\pi}{٤}$) أوجد الصوره الاحداثيه   الحـــــــل

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

هام التحويل من الصوره الإحداثيه للصوره القطبيه :



فى الشكل المقابل :

$\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{س^2 + ص^2}$

$ظا\theta = \frac{ص}{س}$

مثال ١ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٤ ، ٤\sqrt{٣})$ أوجد الصوره القطبيه الحـــــــل

$\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{(٤)^2 + (٤\sqrt{٣})^2} = \sqrt{١٦ + ٤٨} = \sqrt{٦٤} = ٨$

$ظا\theta = \frac{٤\sqrt{٣}}{٤} = \sqrt{٣}$ $\theta = ٦٠^\circ$

الصوره القطبيه هى أ = $(٨ ، ٦٠^\circ)$

مثال ٢ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (٥\sqrt{٣} ، -٥)$ أوجد الصوره القطبيه الحـــــــل

$\| \overrightarrow{أ} \| = \sqrt{(٥\sqrt{٣})^2 + (-٥)^2} = \sqrt{٧٥ + ٢٥} = \sqrt{١٠٠} = ١٠$

$ظا\theta = \frac{-٥}{٥\sqrt{٣}} = \frac{-١}{\sqrt{٣}}$ $\theta = ٣٠^\circ$

من الزوج المرتب $(٥\sqrt{٣} ، -٥)$ الزاويه تقع فى الربع الرابع

$\theta = ٣٦٠ - ٣٠^\circ = ٣٣٠^\circ$ **الصوره القطبيه هى** أ = $(١٠ ، ٣٣٠^\circ)$

تدريب ٣ إذا كان $\overrightarrow{أ} = (-٨\sqrt{٣} ، ٨)$ أوجد الصوره القطبيه الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

جمع المتجهات

مثال إذا كان أ = (٢ ، ١) ، ب = (٣،٥) أوجد أ + ب

الحـــــــــل

أ + ب = (٢ ، ١) + (٣،٥) = (٥،٦)

ضرب عدد حقيقى فى متجه

مثال إذا كان أ = (٢ ، -٣) أوجد ٣ أ **الحـــــــــل**

٣أ = ٣(٢ ، -٣) = (٦ ، -٩)

مثال٢ إذا كان أ = (٢ ، -٣) ، ب = (٣،٥) أوجد أ + ٢ب

الحـــــــــل

أ + ٢ب = (٢ ، -٣) + ٢(٣،٥) = (٢ ، -٣) + (٦ ، ١٠) = (٨ ، ٧)

مثال٣ إذا كان أ = (٣ ، -١) ، ب = (٢،٥) أوجد ٢ أ - ٣ب

الحـــــــــل

٢ أ - ٣ب = ٢ (٣ ، -١) - ٣ (٢،٥)

= (٦ ، -٢) + (-٦ ، -١٥) = (٠ ، -١٧)

مثال٤ إذا كان أ = (٦ ، ١) ، ب = (١،٢) أوجد || أ – ٢ ب ||

أ - ٢ب = (٦ ، ١) - ٢(١،٢) = (٦ ، ١) + (-٢ ، -٤) = (٤ ، -٣)

|| أ – ٢ ب || = √((٤)^2 + (-٣)^2) = √(١٦ + ٩) = √٢٥ = ٥

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كان $\vec{أ}$ = (−٢، ٧) ، $\vec{ب}$ = (٣، −٢) أوجد $\| \vec{أ} + ٢\vec{ب} \|$

$\vec{أ}$ + ٢$\vec{ب}$ = (−٢، ٧) + (٣، −٢) = (١، ٥)

$\| \vec{أ} + ٢\vec{ب} \|$ = $\sqrt{١ + ٢٦}$ = $\sqrt{٢٧}$

تدريب٤ إذا كان $\vec{أ}$ = (٣ ، −١) ، $\vec{ب}$ = (٢ ، −٥) ، $\vec{جـ}$ = (−٥ ، ٥) أوجد

١) $\| \vec{أ} - ٢\vec{ب} - \vec{جـ} \|$

٢) أوجد الصوره القطبيه للمتجه م إذا كان $\vec{م}$ = $\vec{أ}$ − ٢$\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$

الحـــــــل

مثال للاطلاع المنزلى إذا كان أ = (٣، −١) ، ب = (٢، ٥) ، جـ = (−٤، ٢) أوجد

١) ٢أ − ٣ب   ٢) $\frac{١}{٢}$ (٤أ + ٢ب − جـ)   ٣) ٢و − ٣(جـ + أ)

حيث و متجه صفرى   **الحــــــــل**

---

١) ٢$\vec{أ}$ − ٣$\vec{ب}$ = ٢(٣، −١) − ٣(٢، ٥) = (٦، −٢) + (−٦، −١٥) = (٠، −١٧)

٢) $\frac{١}{٢}$ (٤$\vec{أ}$ + ٢$\vec{ب}$ − $\vec{جـ}$) = $\frac{١}{٢}$ ((١٢، −٤) + (٤، ١٠) − (−٤، ٢))

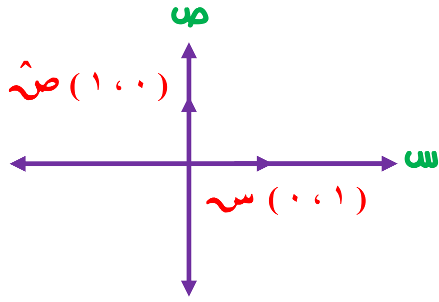
= $\frac{١}{٢}$ (٢٠، ٤) = (١٠، ٢)

٣) ٢و − ٣($\vec{جـ}$ + $\vec{أ}$) = ٢ (٠، ٠) − ٣ ((−٤، ٢) + (٣، −١))

= (٠، ٠) − ٣ (−١، ١) = (٠، ٠) + (٣، −٣) = (٣، −٣)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

متجهات الوحده الاساسيه



لأى نظام أحداثى متعامد فإن

المتجه س⃗ = (١،٠) ، ص⃗ = (٠،١)

يسمى بمتجها الوحدة الاساسيان

ومعيار كل منهما الوحده

مثال عبر بدلالة متجهات الوحده الاساسيه :

١) أ⃗ = (−٣ ، ٤) ← أ⃗ = −٣ س⃗ + ٤ ص⃗

٢) ب⃗ = (٢ ، −٦) ← ب⃗ = ٢ س⃗ − ٦ ص⃗

١) ج⃗ = (−٢ ، −١) ← ج⃗ = −٢ س⃗ − ص⃗

٢) ء⃗ = (٠ ، ٢√٢) ← ء⃗ = ٢√٢ ص⃗

٣) هـ⃗ = (−٣√٣ ، ٠) ← هـ⃗ = −٣√٣ س⃗

مثال إذا كان أ⃗ = ٣√٢ س⃗ + ٣√٢ ص⃗ أوجد الصوره القطبيه

الحـــــل

‖أ⃗‖ = √((٣√٢)² + (٣√٢)²) = √(١٨ + ١٨) = √٣٦ = ٦

ظا θ = ٣√٢ ÷ ٣√٢ = ١ ∴ θ = ٤٥°

الصوره القطبيه هى أ⃗ = (٦ ، ٤٥°)

تدريب٢ إذا كان أ⃗ = ٦ س⃗ − ٦√٣ ص⃗ أوجد الصوره القطبيه

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب منزلى إذا كان $\overleftarrow{أ} = 6\ \overleftarrow{س} - 6\ \overleftarrow{ص}$ أوجد الصوره القطبيه

مثال٢ هام جداً إذا كان ك $\|4\ \overleftarrow{أ}\| = \|-3\ \overleftarrow{أ}\|$ فإن ك = ...

الحـــــــــل

ك $|4|\ \|\overleftarrow{أ}\| = |3|\ \|\overleftarrow{أ}\|$

ك $|4| = |3|$

4ك $= 3$ ك $= \frac{3}{4}$

مثال٣ هام جداً إذا كان $\|-15\ \overleftarrow{أ}\| = \|3$ك $\overleftarrow{أ}\|$ فإن ك = ...

الحـــــــــل

$|-15|\ \|\overleftarrow{أ}\| = |3|\ |$ك$|\ \|\overleftarrow{أ}\|$

$|-15| = |3|\ |$ك$|$

$15 = 3\ |$ك$|$

$|$ك$| = \frac{15}{3}$ ك $= \pm 5$

تدريب إذا كان ك $\|7\ \overleftarrow{أ}\| = \|-5\ \overleftarrow{أ}\|$ فإن ك = ... الحـــــــــل

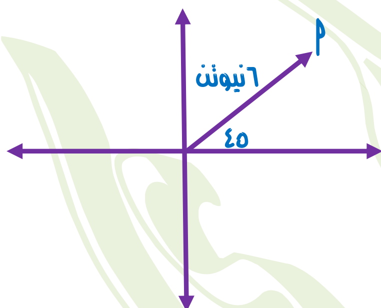
أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تدريب٢ إذا كان ‖ − ٩ م ‖ = ٣ ‖ ك م ‖ فإن ك = ...

تدريب منزلى إذا كان ‖ − ٨ م ‖ = ‖ ٥ ك م ‖ فإن ك = ...

مثال ١ قوه مقدارها ٦ نيوتن تؤثر فى إتجاه الشمال الشرقى أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

الحـــــــــل



الصوره القطبيه $\overleftarrow{م}$ = (٦ ، ٤٥°)

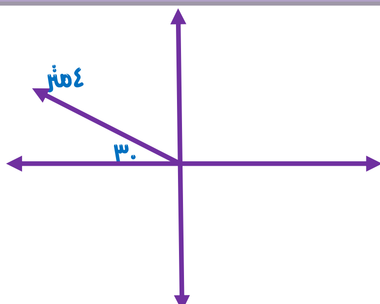
، س = ١٠ $\sqrt{٣}$ جتا٦٠ = ٥ $\sqrt{٣}$

ص = ١٠ $\sqrt{٣}$ جا٦٠ = ١٥

الصوره الإحداثيه هى $\overleftarrow{م}$ = (٥ $\sqrt{٣}$ ، ١٥)

مثال ٢ سرعه منتظمه لسياره تقطع ٤ أمتار كل ثانيه فى إتجاه ٣٠° شمال الغرب أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

الحـــــــــل



θ = ١٨٠ − ٣٠ = ١٥٠

الصوره القطبيه م = (٤ ، ١٥٠°)

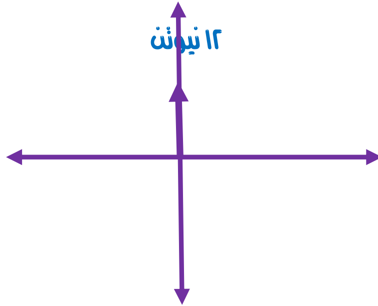
، س = ٤ جتا١٥٠ = −٢ $\sqrt{٣}$

ص = ٤ جا١٥٠ = ٢

الصوره الإحداثيه هى م = (−٢ $\sqrt{٣}$ ، ٢)

مثال٣ إذا كان إزاحو جسم ١٢ نيوتن فى إتجاه الشمال أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

الحـــــــل



θ = ٩٠

الصوره القطبيه = $\overleftarrow{أ}$ = (١٢ ، ٩٠°)

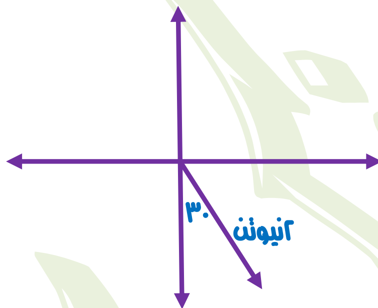
، س = ١٢ جتا٩٠ = ٠

ص = ٤ جا٩٠ = ١٢

الصوره الاحداثيه هى $\overleftarrow{أ}$ = (٠ ، ١٢)

مثال٤ قوه مقدارها ٢نيوتن تؤثر فى إتجاه ٣٠ شرق الجنوب أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

الحـــــــل



θ = ٢٧٠ + ٣٠ = ٣٠٠

الصوره القطبيه أ = (٤ ، ٣٠٠°)

، س = ٢ جتا٣٠٠ = ١

ص = ٢ جا٣٠٠ = − $\sqrt{٣}$

الصوره الاحداثيه هى $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، − $\sqrt{٣}$)

تدريب قوه مقدارها ٢٠نيوتن تؤثر فى إتجاه ٣٠ شرق الشرق أوجد الصوره القطبيه و الإحداثيه

الحـــــــل

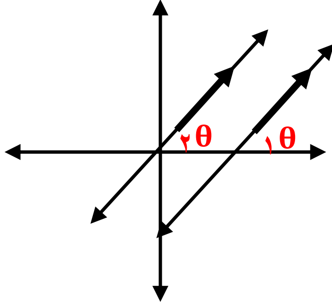
شرط توازى متجهين

ميل المتجه الأول = ميل المتجه الثانى

$ظا\theta_1 = ظا\theta_2$

$\frac{ص_1}{س_1} = \frac{ص_2}{س_2}$

$س_1 ص_2 - س_2 ص_1 = 0$



والعكس صحيح

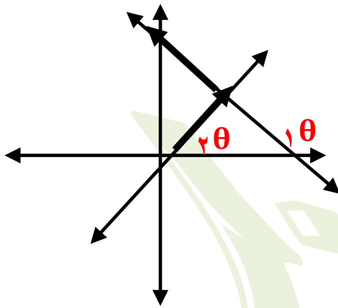
شرط تعامد متجهين

ميل المتجه الأول × ميل المتجه الثانى = −١

$ظا\theta_1 \times ظا\theta_2 = -1$

$\frac{ص_1}{س_1} \times \frac{ص_2}{س_2} = -1$

$س_1 س_2 + ص_1 ص_2 = 0$



والعكس صحيح

مثال إذا كان $\overleftarrow{ل} = (٣ ، ٦)$ ، $\overleftarrow{ن} = (٦ ، ١٢)$ إثبت أن $\overleftarrow{ل} // \overleftarrow{ن}$ **الحـــــــــل**

$م_1 = \frac{٦}{٣} = ٢$ ، $م_2 = \frac{١٢}{٦} = ٢$

$م_1 = م_2$ $\overleftarrow{ل} // \overleftarrow{ن}$

مثال٢ إذا كان ل = −٢ $\overleftarrow{س}$ + $\overleftarrow{ص}$ ، ن = ٢ $\overleftarrow{س}$ + ٤ $\overleftarrow{ص}$

إثبت أن $\overleftarrow{ل} \perp \overleftarrow{ن}$ **الحـــــــــل**

$م_1 = \frac{١}{-٢}$ ، $م_2 = \frac{٤}{٢} = ٢$

$م_1 \times م_2 = \frac{١}{-٢} \times ٢ = -١$ $\overleftarrow{ل} \perp \overleftarrow{ن}$

مثال٣ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ـ٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ك) أوجد قيمة ك إذا كان $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ الحـــــل

$\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ م١ = م٢

$\frac{٣}{-٢} = \frac{ك}{٤}$ ك = $\frac{١٢ \quad ٣}{-٢}$ = ـ ٦

مثال٤ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ـ٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ـ٤ ، م) أوجد قيمة م إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ الحـــــل

$\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ م١ × م٢ = ـ١

$\frac{٣}{-٢} \times \frac{م}{-٤}$ = ـ١

$\frac{٣ك}{٨}$ = ـ١

٣ك = ٨ × ـ١

٣ك = ـ٨ ك = $\frac{-٨}{٣}$

تدريب١ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = ٣ $\overleftarrow{س}$ + ٢ $\overleftarrow{ص}$ ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ـ٣) إثبت أن $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ الحـــــل

تدريب٢ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (ك ، ـ٨) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٣ ، ٣) أوجد قيمة ك إذا كان $\overleftarrow{أ}$ ⊥ $\overleftarrow{ب}$ الحـــــل

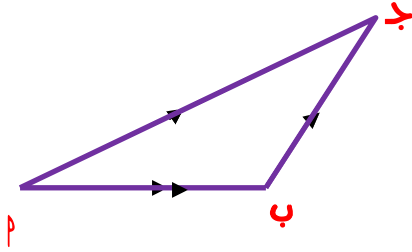
تدريب٣ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (ك ، ٦) أوجد قيمة ك إذا كان $\overleftarrow{أ}$ // $\overleftarrow{ب}$ الحـــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

العمليات على المتجهات

جمع المتجهات هندسياً

قاعدة المثلث لجمع متجهين (قاعدة شال)



فى الشكل المقابل :

$\overrightarrow{ٲب} = \overrightarrow{ٲجـ} + \overrightarrow{جـب}$

أى أن الإزاحه $\overrightarrow{ٲب}$ (من نقطة ٲ إلى ب) تكافئ إزاحه $\overrightarrow{ٲجـ}$ (من نقطة ٲ إلى جـ)

متبوعه بإزاحه أخرى $\overrightarrow{جـب}$ (من نقطة جـ إلى ب)

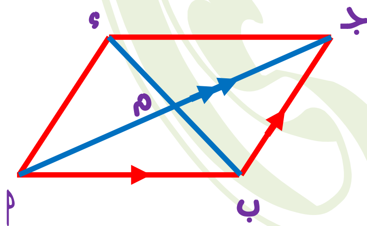
لاحظ أن

١) $\overrightarrow{ٲب} = \overrightarrow{ٲجـ} + \overrightarrow{جـب}$

٢) $\overrightarrow{ٲب} + \overrightarrow{بجـ} + \overrightarrow{جـٲ} = \overrightarrow{٠}$

٣) طرح متجهين $\overrightarrow{ٲب} - \overrightarrow{ٲجـ} = \overrightarrow{جـب}$

قاعدة متوازى الاضلاع



فى الشكل المقابل : ٲ ب جـ ء متوازى أضلاع

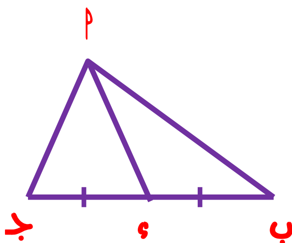
$\overrightarrow{ٲب} + \overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{ٲجـ}$

$\overrightarrow{ٲب} + \overrightarrow{ٲء} = \overrightarrow{ٲجـ}$ حيث $\overrightarrow{بجـ}$ يكافئ $\overrightarrow{ٲء}$

$\overrightarrow{ٲب} + \overrightarrow{ٲء} = ٢ \overrightarrow{ٲم}$ حيث $\overrightarrow{ٲجـ}$ يكافئ $٢ \overrightarrow{ٲم}$

الحظ أن

فى الشكل المقابل : إذا كان $\overrightarrow{ٲء}$ متوسط فإن :

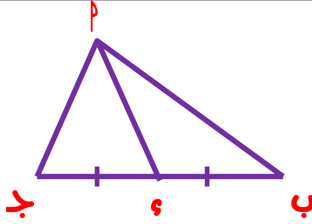


$\overrightarrow{ٲب} + \overrightarrow{ٲجـ} = ٢ \overrightarrow{ٲء}$

، $\overrightarrow{بٲ} + \overrightarrow{جـٲ} = ٢ \overrightarrow{ءٲ}$ لاحظ ان المتجهات تخرج من نقطه واحده أو تدخل لنقطه واحده

أ/ احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال إذا كان أ ب جـ مثلث فيه ء منتصف $\overline{\text{ب جـ}}$ إثبت أن $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أء}}$ **الحـــــل**



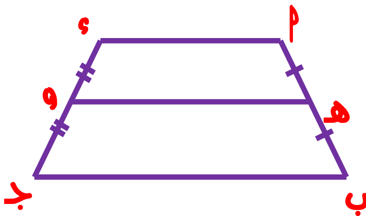
الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{أجـ}}$

= $\overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءب}} + \overrightarrow{\text{أء}} + \overrightarrow{\text{ءجـ}}$

= $٢\ \overrightarrow{\text{أء}}$ حيث $\overrightarrow{\text{ءب}}$ ، $\overrightarrow{\text{ءجـ}}$ متساويان

مثال٢ إذا كان أ ب جـ ء شكل رباعى ، هـ منتصف $\overline{\text{أب}}$ ، و منتف $\overline{\text{جـء}}$ إثبت أن $\overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{أء}} = ٢\ \overrightarrow{\text{هـ و}}$

الحـــــل



الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{أء}}$

= $\overrightarrow{\text{ب هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ و}} + \overrightarrow{\text{و جـ}} + \overrightarrow{\text{أ هـ}} + \overrightarrow{\text{هـ و}} + \overrightarrow{\text{و ء}}$

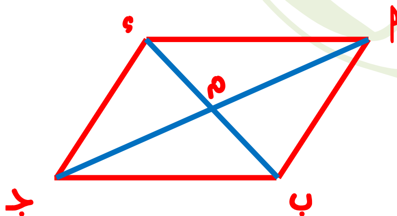
= $٢\ \overrightarrow{\text{هـ و}}$ وهو المطلوب إثباته

حيث ($\overrightarrow{\text{ب هـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{أ هـ}}$) ، ($\overrightarrow{\text{و جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{و ء}}$) متساويان فى المقدار ومتضادان فى الاتجاه

مثال٣ أ ب جـ ء متوازى أضلاع تقاطع قطراه فى م إثبت أن

١) $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{أب}}$ ٢) $\overrightarrow{\text{أجـ}} - \overrightarrow{\text{ءب}} = ٢\ \overrightarrow{\text{ب جـ}}$

الحـــــل



الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{أجـ}} + \overrightarrow{\text{ءب}}$

= $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{ءأ}} + \overrightarrow{\text{أب}}$

= $٢\ \overrightarrow{\text{أب}}$ المطلوب أولا

الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{أجـ}} - \overrightarrow{\text{ءب}}$

= $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} - (\overrightarrow{\text{ءجـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ب}}) = \overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} - \overrightarrow{\text{ءجـ}} - \overrightarrow{\text{جـ ب}}$

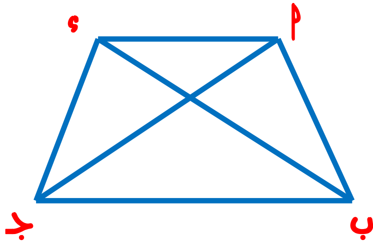
= $\overrightarrow{\text{أب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـء}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٢\ \overrightarrow{\text{ب جـ}}$ المطلوب ثانيا

تدريب ١ فى أى شكل رباعى أ ب جـ ء أثبت أن

١) $\overrightarrow{\text{أ ب}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}} = \overrightarrow{\text{أ ء}}$

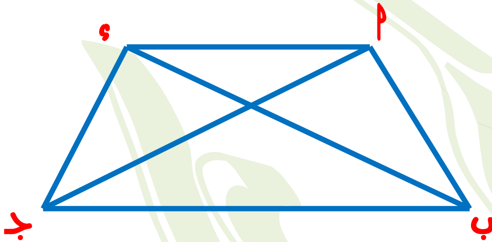
٢) $\overrightarrow{\text{أ جـ}} - \overrightarrow{\text{ب جـ}} = \overrightarrow{\text{أ ء}} - \overrightarrow{\text{ب ء}}$

الحـــــــل



مثال ٤ فى الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه $\overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٣ \overrightarrow{\text{أ ء}}$ أثبت أن $\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = ٤ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

الحـــــــــل



الطرف الأيمن = $\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}}$

$= \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} + \overrightarrow{\text{ب جـ}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}}$

$= \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{ء جـ}} + ٣ \overrightarrow{\text{أ ء}} + \overrightarrow{\text{جـ ء}}$

$= ٤ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

تدريب ٢ فى الشكل الرباعى أ ب جـ ء الذى فيه $٢ \overrightarrow{\text{ب جـ}} = ٣ \overrightarrow{\text{أ ء}}$

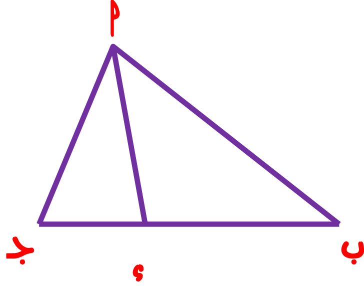
١) أثبت أن أ ب جـ ء شبه منحرف

٢) $\overrightarrow{\text{أ جـ}} + \overrightarrow{\text{ب ء}} = \frac{٥}{٢} \overrightarrow{\text{أ ء}}$

مثال ٥ فى المثلث أ ب جـ إذا كان ء ∈ $\overline{\text{ب جـ}}$ ، ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

أثبت أن ٢ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

الحـــــــــــل



الطرف الأيمن = ٢ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$

= ٢ ($\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + $\overleftarrow{\text{ء ب}}$) + ٣ ($\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$)

= ٢ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٣ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

= ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ء ب}}$ + ٢ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$

= ٥ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

تدريب ٣ فى المثلث أ ب جـ إذا كان ء ∈ ب جـ ، ٣ $\overleftarrow{\text{ب ء}}$ = ٤ $\overleftarrow{\text{ء جـ}}$

أثبت أن ٣ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ + ٤ $\overleftarrow{\text{أ جـ}}$ = ٧ $\overleftarrow{\text{أ ء}}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٦ إذا كان ٣ن - ٢س ص = ٦ ع ص + ٨ ص س   أثبت أن ن = ٢ ع س

الحــــــــــل

٣ن - ٢س ص = ٦ ع ص + ٨ ص س

٣ن = ٦ ع ص + ٨ ص س + ٢ س ص

٣ن = ٦ ع ص + ٨ ص س - ٢ ص س

٣ن = ٦ ع ص + ٦ ص س   بالقسمة على ٣

ن = ٢ ع ص + ٢ ص س

ن = ٢ (ع ص + ص س)

ن = ٢ (ع س)   ن = ٢ ع س

تدريب٤ إذا كان ٤م - ٣س ص = ٤ ع ص + ٧ ص س   أثبت أن م = ع س

الحــــــــــل

مثال ٧ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (-١ ، ٥) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٢ ، ١) أوجد $\|\overleftarrow{أ ب}\|$

الحـــــل

$\overleftarrow{أ ب}$ = $\overleftarrow{ب}$ - $\overleftarrow{أ}$ = (٢ ، ١) - (-١ ، ٥) = (٣ ، -٤)

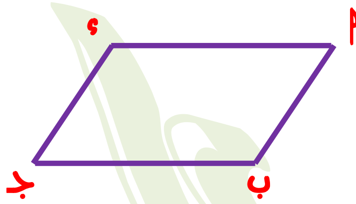
$\|\overleftarrow{أ ب}\|$ = $\sqrt{(٣)^٢ + (-٤)^٢}$ = $\sqrt{٩ + ١٦}$ = $\sqrt{٢٥}$ = ٥

تدريب ٥ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، -٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٦ ، ٢) أوجد $\|\overleftarrow{أ ب}\|$

الحـــــل

مثال ٨ أ ب جـ ء متوازى أضلاع $\overleftarrow{أ}$ = (٣ ، ٠) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٠ ، ٤) ، $\overleftarrow{ء}$ = (-٢ ، -١) أوجد إحداثى $\overleftarrow{جـ}$

الحـــــل



$\overleftarrow{أ ب}$ = $\overleftarrow{ء جـ}$

$\overleftarrow{ب}$ - $\overleftarrow{أ}$ = $\overleftarrow{جـ}$ - $\overleftarrow{ء}$

$\overleftarrow{جـ}$ = $\overleftarrow{ب}$ + $\overleftarrow{ء}$ - $\overleftarrow{أ}$

$\overleftarrow{جـ}$ = (٠ ، ٤) + (-٢ ، -١) - (٣ ، ٠) = (-٥ ، ٣)

تدريب ٦ أ ب جـ ء متوازى أضلاع $\overleftarrow{أ}$ = (س ، ١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٥ ، ٢) ، $\overleftarrow{جـ}$ = (-٣ ، -٤)

، $\overleftarrow{ء}$ = (٢ ، ص) أوجد قيمة س ، ص

الحـــــل

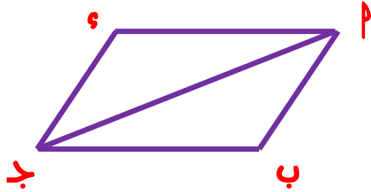
أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال١ إثبت أنه إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان فى أى شكل رباعى فإن الضلعين الأخرين يكونان متساويان ومتوازيان أى أن الشكل يكون متوازى أضلاع **الحـــــل**

المعطيات: $\overline{أ ب}$ ⫽ $\overline{ء جـ}$ ، أ ب = ء جـ ، أ ب جـ ء شكل رباعى

المطلوب: أ ء = ب جـ

العمل: نرسم $\overline{أ جـ}$



البرهان: $\overrightarrow{أ جـ}$ = $\overrightarrow{أ ب}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ ⟵ ١

، $\overrightarrow{أ جـ}$ = $\overrightarrow{أ ء}$ + $\overrightarrow{ء جـ}$ ⟵ ٢

من ١ ، ٢ ∴ $\overrightarrow{أ ب}$ + $\overrightarrow{ب جـ}$ = $\overrightarrow{أ ء}$ + $\overrightarrow{ء جـ}$ حيث $\overrightarrow{أ ب}$ = $\overrightarrow{ء جـ}$ معطى

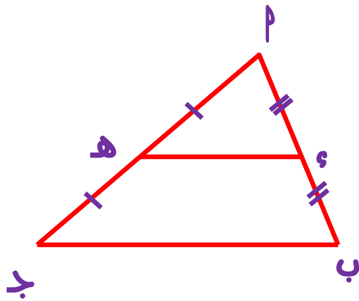
$\overrightarrow{ب جـ}$ = $\overrightarrow{أ ء}$

ب جـ = أ ء ، $\overline{ب جـ}$ ⫽ $\overline{أ ء}$ ∴ الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع

مثال٢ إثبت أن القطعه المستقمه المرسومه بين منتصفى ضلعين فى مثلث توازى وتساوى نصف طول الضلع الثالث

المعطيات: ء منتصف $\overline{أ ب}$ ، هـ منتصف $\overline{أ جـ}$

المطلوب: $\overline{ء هـ}$ ⫽ $\overline{ب جـ}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ



البرهان: فى △ أ ء هـ $\overrightarrow{ء هـ}$ = $\overrightarrow{ء أ}$ + $\overrightarrow{أ هـ}$

$\overrightarrow{ء هـ}$ = $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{ب أ}$ + $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{أ جـ}$

$\overrightarrow{ء هـ}$ = $\frac{1}{2}$ ($\overrightarrow{ب أ}$ + $\overrightarrow{أ جـ}$) = $\frac{1}{2}$ $\overrightarrow{ب جـ}$

$\overline{ء هـ}$ ⫽ $\overline{ب جـ}$ ، ء هـ = $\frac{1}{2}$ ب جـ

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء متوازى أضلاع نثبت أن أ ب = ء جـ (أى ان كل ضلعين متقابلين متوازيان ومتساويان)

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء مستطيل نثبت أن الشكل متوازى أضلاع (أ ب = ء جـ) ثم نثبت أن

$\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ أو $\|\overrightarrow{أجـ}\| = \|\overrightarrow{بء}\|$

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء معين نثبت أن الشكل متوازى أضلاع (أ ب = ء جـ) ثم نثبت أن

$\overline{أجـ} \perp \overline{بء}$ أو $\|\overrightarrow{أب}\| = \|\overrightarrow{بجـ}\|$

لإثبات أن الشكل أ ب جـ ء مربع نثبت أن الشكل متوازى أضلاع (أ ب = ء جـ) ثم نثبت أن

ثم نثبت خاصيه من المعين وخاصيه من المستطيل

مثال ٣ إثبت أن أ ب جـ ء معين إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (-١ ، ٤) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ١) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (-١ ، -٢) ، $\overrightarrow{ء}$ = (-٣ ، ١)

$\overrightarrow{أب} = \overrightarrow{ب} - \overrightarrow{أ}$ = (١ ، ١) - (-١ ، ٤) = (٢ ، -٣) ← ١

$\overrightarrow{ءجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ء}$ = (-١ ، -٢) - (-٣ ، ١) = (٢ ، -٣) ← ٢

من ١ ، ٢ أ ب = ء جـ الشكل متوازى أضلاع ← ٣

، $\|\overrightarrow{أب}\| = \sqrt{(٢)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ ← ٤

، $\overrightarrow{بجـ} = \overrightarrow{جـ} - \overrightarrow{ب}$ = (-١ ، -٢) - (١ ، ١) = (-٢ ، -٣)

، $\|\overrightarrow{بجـ}\| = \sqrt{(-٢)^٢ + (-٣)^٢} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣}$ ← ٥

من ٣ ، ٤ ، ٥ الشكل أ ب جـ ء معين

مثال ٤ أوجد نقطة تقاطع متوسطات المثلث أ ب جـ إذا كان $\overrightarrow{أ}$ = (٢ ، ١) ، $\overrightarrow{ب}$ = (١ ، ٥) ، $\overrightarrow{جـ}$ = (٦ ، -٣)

م = $\left(\frac{س_١ + س_٢ + س_٣}{٣} ، \frac{ص_١ + ص_٢ + ص_٣}{٣} \right) = \left(\frac{٢ + ١ + ٦}{٣} ، \frac{١ + ٥ - ٣}{٣} \right)$

$= \left(\frac{٩}{٣} ، \frac{٣}{٣} \right) = (٣ ، ١)$

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

التطبيقات الفيزيائيه

مثال إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق}_١ = ٥\overrightarrow{س} + ٢\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = (-٢ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ق}_٣ = ٢\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

فى نقطه ماديه أوجد مقدار واتجاه المحصله حيث القوى مقاسه بالنيوتن

الحـــــل

القوى المحصله : $\overrightarrow{ق} = (٥ ، ٢) + (-٢ ، ٧) + (٢ ، -١) = (٥ ، ٨)$

مقدار المحصله $\| \overrightarrow{ق} \| = \sqrt{(٥)^٢ + (٨)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٦٤} = \sqrt{٨٩}$ نيوتن

$ظا\theta = \frac{٨}{٥}$ $\theta \approx ٥٨^\circ$

أى ان محصلة القوى تصنع زاويه قياسها ٥٨° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

تدريب١ إذا أثرت القوى $\overrightarrow{ق}_١ = ٥\overrightarrow{س} + ٣\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق}_٢ = (-٢ ، ٧)$ ، $\overrightarrow{ق}_٣ = ٣\overrightarrow{س} - \overrightarrow{ص}$

فى نقطه ماديه أوجد مقدار واتجاه المحصله حيث القوى مقاسه بالنيوتن

ملحوظه هامه : إذا كانت القوى المحصله تساوى صفر فإن الجسم يكون متزن والعكس صحيح

مثال٦ إذا كان $\overrightarrow{ق_1}$ = (٤ ، -٢) ، $\overrightarrow{ق_2}$ = م $\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$ ، $\overrightarrow{ق_3}$ = (-٥ ، ب) أوجد م ، ب إذا كان

١) القوى متزنه ٢) القوى المحصله = ٢$\overrightarrow{س}$ - $\overrightarrow{ص}$

الحـــــــل

أولاً إذا كانت القوى متزنه : ∴ $ق_1$ + $ق_2$ + $ق_3$ = ٠

(٤ ، -٢) + (م ، -١) + (-٥ ، ب) = ٠

(٤ + م - ٥ ، -٢ - ١ + ب) = ٠

(م - ١ ، ب - ٣) = (٠ ، ٠)

م - ١ = ٠ ، ب - ٣ = ٠

م = ١ ، ب = ٣

ثانياً إذا كانت القوى المحصله = ٢س - ص

$ق_1$ + $ق_2$ + $ق_3$ = ٢س - ص

(٤ ، -٢) + (م ، -١) + (-٥ ، ب) = (٢ ، -١)

(م - ١ ، ب - ٣) = (٢ ، -١)

م - ١ = ٢ ، ب - ٣ = -١

م = ٣ ، ب = ٢

السرعه النسبيه :

بفرض هناك جسمان م ، ب فان

$ع_م$ هى السرعه الفعليه للجسم م ، $ع_ب$ هى السرعه الفعليه للجسم ب

$ع_{مب}$ هى سرعة م بالنسبه لـ ب ، $ع_{بم}$ هى سرعة ب بالنسبه لـ م

مثال٧ تتحرك سياره م على طريق مستقيم بسرعه ٩٠ كم وتتحرك سياره ب على نفس الطريق بسرعه ٥٠ كم أوجد سرعة م بالنسبه لـ ب إذا كان

١) السيارتان تتحركان فى إتجاه واحد ٢) السيارتان تتحركان فى إتجاهين متضادين

الحـــــــل

بفرض أن ى متجه فى إتجاه السياره م

أولاً إذا كانت السيارتان تتحركان فى إتجاه واحد

$ع_م$ = ٩٠ى

$ع_ب$ = ٥٠ى

$ع_{مب}$ = $ع_م$ – $ع_ب$ = ٩٠ى – ٥٠ى = ٤٠ى

أى أن راكب السياره ب يرى السياره م تتحرك بسرعه ٤٠ نيوتن

ثانياًإذا كانت السيارتان تتحركان فى إتجاهين متضادين

$ع_م$ = ٩٠ى

$ع_ب$ = – ٥٠ى

$ع_{مب}$ = $ع_م$ – $ع_ب$ = ٩٠ى – (– ٥٠ى) = ٩٠ى + ٥٠ى

= ١٤٠ى

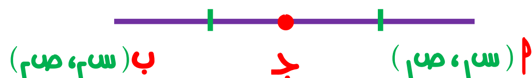
أى أن راكب السياره ب يرى السياره م تتحرك بسرعه ١٤٠ نيوتن

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

تقسيم قطعة مستقيمة

درسنا فى ماسبق تنصيف قطعة مستقيمة $\overline{\text{ﻫ ب}}$

حيث ﻫ ($س_1$ ، $ص_1$) ، ب ($س_2$ ، $ص_2$)



فإن أحداثى منتصف المسافة بين ﻫ ب هو

$$\text{جـ} = \left(\frac{س_1 \quad س_2}{2} \text{ ، } \frac{ص_1 + ص_2}{2} \right)$$

مثال أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ حيث ﻫ = (٣ ، ٥) ، ب = (١ ، −١)

الحـــــــل

$$\text{م} = \left(\frac{3 \quad 1}{2} \text{ ، } \frac{5 \quad 1}{2} \right) = (2 \text{ ، } 2)$$

مثال٢ إذا كان (٣ ، ٦) هى منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ بحيث ﻫ = (−٣ ، ٧) أوجد إحداثى ب

الحـــــــل بفرض أن ب (س ، ص)

$$(3 \text{ ، } 6) = \left(\frac{-3 + س}{2} \text{ ، } \frac{7 + ص}{2} \right)$$

$$\frac{-3 + س}{2} = 3$$

$$-3 + س = 6$$

$$س = 9$$

$$\frac{7 + ص}{2} = 6$$

$$7 + ص = 12$$

$$ص = 12 - 7 = 5$$

$$\text{ب} = (9 \text{ ، } 5)$$

تدريب أوجد إحداثى نقطة م منتصف $\overline{\text{ﻫ ب}}$ حيث ﻫ = (٤ ، −٣) ، ب = (−٢ ، ٥)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

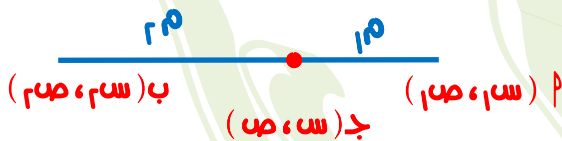
تدريب٢ إذا كان ج (٢،١) هى منتصف $\overline{أب}$ ، ب (٣،٠) فأوجد أ

الحـــــــــل

تدريب منزلى إذا كانت ج منتصف أ ب فأوجد س ، ص حيث أ (س ، ٣) ، ب (٦ ، ص) ، ج (٤ ، ٦)

الحـــــــــل

التقسيم من الداخل : إذا كانت ج تقسم أ ب من الداخل فإن إحداثى ج هو



$س = \frac{م_1 س_2 \quad م_2 س_1}{م_1 \quad م_2}$ ، $ص = \frac{م_1 ص_2 \quad م_2 ص_1}{م_1 \quad م_2}$

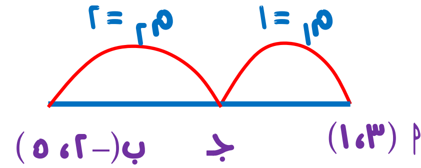
حيث م١ : م٢ هى نسبة التقسيم

التقسيم من الخارج : لايجاد أحداثى النقطه ج (س ، ص)

$س = \frac{م_1 س_2 \quad م_2 س_1}{م_1 \quad م_2}$ ، $ص = \frac{م_1 ص_2 \quad م_2 ص_1}{م_1 \quad م_2}$

مثال ٣ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (١، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤، ٥) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

الحـــــــــل



س = (م١ س٢ م٢ س١) / (م١ م٢)

= (١ ٢ ٤ ١) / (٢ ١) = (٤ +٢) / ٣ = ٦ / ٣ = ٢

، ص = (م١ ص٢ م٢ ص١) / (م١ م٢)

= (١ ٥ ٢ ٢) / (١ ٢) = (٥ ٤) / ٣ = ٩ / ٣ = ٣

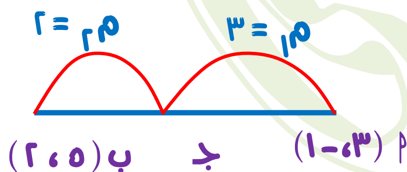
جـ (٢، ٣)

مثال ٤ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (٣، –١) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٥، ٢) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{أ ب}$ من الداخل

بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب

الحـــــــــل

أ جـ / جـ ب = ٣ / ٢



س = (م١ س٢ م٢ س١) / (م١ م٢)

= (٣ ٥ ٢ ٣) / (٣ ٢) = (١٥ ٦) / ٥ = ٢١ / ٥

، ص = (م١ ص٢ م٢ ص١) / (م١ م٢)

= (٣ ٢ ٢ –١) / (٣ ٢) = (٦ ٢) / ٥ = ٤ / ٥

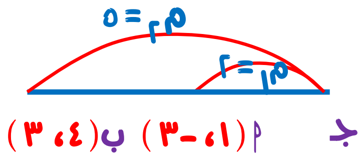
جـ (٢١/٥ ، ٤/٥)

تدريب ٣ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (١، ٣) ، $\overleftarrow{ب}$ = (–٤، –٢) أوجد أحداثى جـ إذا كانت جـ ∋ $\overline{أ ب}$ بحيث ٣ أ جـ = ٢ جـ ب

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثاله إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (١، -٣) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٤، ٣) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overline{\text{أ ب}}$ من الخارج بنسبة ٢:٥

الحـــــــــل



$$\text{س} = \frac{\text{م}_1\ \text{س}_2 \quad \text{م}_2\ \text{س}_1}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$= \frac{٢\ \ ٤ \quad ٥\ \ ١}{٢ \quad ٥} = \frac{٨ \quad ٥}{-٣} = \frac{٣}{-٣} = -١$$

$$\text{، ص} = \frac{\text{م}_1\ \text{ص}_2 \quad \text{م}_2\ \text{ص}_1}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$= \frac{٢\ \ ٣ \quad ٥\ \ -٣}{٢ \quad ٥} = \frac{٦+١٥}{-٣} = \frac{٢١}{-٣} = -٧$$

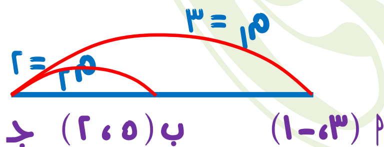
جـ (-١ ، -٧)

مثال٦ إذا كان $\overleftarrow{\text{أ}}$ = (٣، -١) ، $\overleftarrow{\text{ب}}$ = (٥، ٢) أوجد أحداثى جـ إذا كان : جـ ∈ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، جـ ∉ $\overline{\text{أ ب}}$

بحيث ٢ أ جـ = ٣ جـ ب

الحـــــــــل

$$\frac{\text{أ جـ}}{\text{جـ ب}} = \frac{٣}{٢}$$



$$\text{س} = \frac{\text{م}_1\ \text{س}_2 \quad \text{م}_2\ \text{س}_1}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$= \frac{٣\ \ ٥ \quad ٢\ \ ٣}{٣ - ٢} = \frac{١٥ \quad ٦}{١} = ٩$$

$$\text{، ص} = \frac{\text{م}_1\ \text{ص}_2 \quad \text{م}_2\ \text{ص}_1}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$= \frac{٣\ \ ٢ \quad ٢\ \ -١}{٣ \quad ٢} = \frac{٦ \quad ٢}{١} = ٨$$

جـ (٩ ، ٨)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٧ إذا كان $\overleftarrow{ا} = (١ ، -٣)$ ، $\overleftarrow{ب} = (-٢ ، -٩)$ ، $\overleftarrow{جـ} = (٥ ، ٥)$

١) أوجد النسبه التى تقسم بها جـ القطعه $\overleftarrow{ا\,ب}$ مبيناً نوع التقسيم

٢) أوجد النسبه التى تقسم بها ا القطعه $\overleftarrow{ب\,جـ}$ مبيناً نوع التقسيم

الحـــــــــــل

$$\text{س} = \frac{\text{م}_1\ \text{س}_2 \quad \text{م}_2\ \text{س}_1}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$٥ = \frac{\text{م}_1\ -٢ \quad \text{م}_2\ ١}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2} \qquad ٥ = \frac{-٢\text{م}_1 \quad \text{م}_2}{\text{م}_1 \quad \text{م}_2}$$

$$٥\text{م}_1 + ٥\text{م}_2 = -٢\text{م}_1 + \text{م}_2$$

$$٥\text{م}_1 + ٢\text{م}_1 = \text{م}_2 - ٥\text{م}_2 \qquad ٧\text{م}_1 = -٤\text{م}_2$$

$\frac{\text{م}_1}{\text{م}_2} = \frac{-٤}{٧}$ الاشاره سالبه يكون التقسيم من الخارج

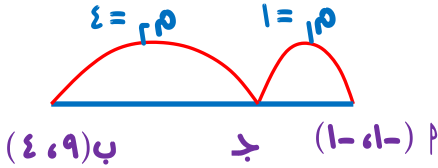
جـ تقسم ا ب من الخارج بنسبة $\frac{٤}{٧}$

أكمل لإيجاد نسبه التى تقسم بها ا القطعه ب جـ مبيناً نوع التقسيم

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٨ أوجد إحداثى جـ التى تقع عند خمس المسافه من النقطه $\overleftarrow{أ}$ = (-١ ، -١)

الى النقطه ، $\overleftarrow{ب}$ = (٩ ، ٤) الحـــــل



س = $\frac{م١ \ س٢ \quad م٢ \ س١}{م١ \quad م٢}$

= $\frac{١ \quad ٩ \quad ٤ \quad -١}{١ \quad ٤}$ = $\frac{٩ \quad ٤}{٥}$ = $\frac{٥}{٥}$ = ١

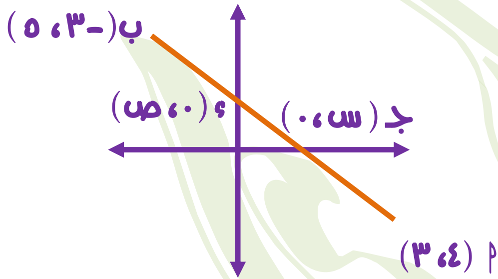
، ص = $\frac{م١ \ ص٢ \quad م٢ \ ص١}{م١ \quad م٢}$

= $\frac{١ \quad ٤ \quad ٤ \quad -١}{١ \quad ٤}$ = $\frac{٤-٤}{٥}$ = $\frac{٠}{٥}$ = ٠ جـ (١ ، ٠)

مثال ٨ أوجد النسبه التى تنقسم بها أ ب بكل من نقطتى تقاطعهما مع محورى

الاحداثيات إذا كان أ = (٤ ، -٣) ، ب = (٩ ، ٤) الحـــــل

أولاً لايجاد نقطة جـ من الرسم الموضح



ص = $\frac{م١ \ ص٢ \quad م٢ \ ص١}{م١ \quad م٢}$

٠ = $\frac{م١ \times ٥ \quad م٢ \quad -٣}{م١ \quad م٢}$ ٥م١ - ٣م٢ = ٠

٥م١ = ٣م٢ $\frac{م١}{م٢}$ = $\frac{٣}{٥}$ جـ تقسم أ ب بنسبة ٣ : ٥

ولايجاد احداثى جـ (س ، ٠)

س = $\frac{م١ \ س٢ \quad م٢ \ س١}{م١ \quad م٢}$

= $\frac{٣ \quad -٣ \quad ٥ \quad ٤}{٣ \quad ٥}$ = $\frac{-٩ + ٢٠}{٨}$ = $\frac{١١}{٨}$ جـ ($\frac{١١}{٨}$ ، ٠) أكمل لايجاد إحداثى ء

أ/ احمد فكرى ت/ ٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٨ إذا كان أ = (٢ ، ٣) ، ب = (-٢ ، ١) أوجد النسبه التى تقسم بها أ ب بمحور السينات

الحـــــل

المستقيم يقطع محور السينات ∵ ص = ٠

$م_١ ص_٢ + م_٢ ص_١ = ٠$

$م_١ × ١ + م_٢ × ٣ = ٠$

$م_١ + ٣م_٢ = ٠$ $م_١ = -٣م_٢$ $\frac{م_١}{م_٢} = \frac{-٣}{١}$ والتقسيم من الخارج

ملحوظه : لايجاد التقسيم من الداخل أو الخارج باستخدام الصيغه المتجهه

١) التقسيم من الداخل $ر = \frac{ل_١ ر_٢ + ل_٢ ر_١}{ر_١ + ر_٢}$

٢) التقسيم من الخارج $ر = \frac{ل_١ ر_٢ - ل_٢ ر_١}{ر_١ \quad ر_٢}$

مثال ٣ إذا كان $\overleftarrow{أ}$ = (١ ، ٢) ، $\overleftarrow{ب}$ = (٤ ، ٥) أوجد أحداثى جـ التى تقسم $\overleftarrow{أ ب}$ من الداخل بنسبة ١ : ٢

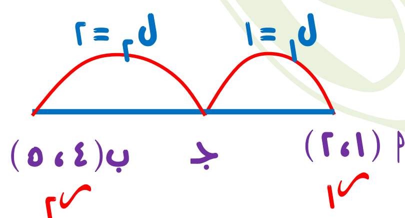
الحـــــل

$ر = \frac{ل_١ ر_٢ + ل_٢ ر_١}{ر_١ + ر_٢}$

$= \frac{١(٤ ، ٥) + ٢(١ ، ٢)}{١ \quad ٢}$

$= \frac{(٤ ، ٥) \quad (٢ ، ٤)}{٣}$

$= \frac{(٦ ، ٩)}{٣}$ $ر = (٢ ، ٣)$



أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

معادلة الخط المستقيم

الصوره العامه لمعادلة الخط المستقيم : أ س + ب ص + جـ = ٠

والإيجاد هذه المعادله يكون من ميل المستقيم $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

حيث ($س_١$ ، $ص_١$) هى النقطه التى يمر بها المستقيم ، هو ميل المستقيم

ميل المستقيم

الميل بمعلومية	الميل بمعلومية	الميل بمعلومية
زاويه θ	نقطتين ($س_١$ ، $ص_١$) ، ($س_٢$ ، $ص_٢$)	معادله أ س + ب ص + جـ = ٠
الميل = ظا θ	الميل = $\frac{\text{فرق الصادات}}{\text{فرق السينات}} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١}$	الميل = $\frac{\text{معامل س}}{\text{معامل ص}}$
مثال ١ أوجد ميل المستقيم الذى يصنع زاويه قياسها ١٣٥°	مثال ٢ أوجد ميل المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٣ ، ٦) ، (٢ ، ٤)	مثال ٣ أوجد ميل المستقيم الذى معادلته ٣ س + ٢ص = ٤
الحـــــــل	الحـــــــل	الحـــــــل
الميل = ظا ١٣٥ = -١	الميل = $\frac{٤}{٢} \frac{٦}{٣} = \frac{٢}{١} = ٢$	الميل = $\frac{٣}{٢}$

مثال ٤ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه (٣ ، -١) وميله $\frac{٣}{٤}$

الحـــــــل

$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ⟵ $\frac{ص + ١}{س - ٣} = \frac{٣}{٤}$ ⟵ ٤(ص+١) = -٣ (س - ٣)

٤ص + ٤ = -٣س + ٩ ⟵ ∴ ٣س + ٤ص - ٥ = ٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٥ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يصنع زاويه ٤٥ ويمر بالنقطه (٣ ، ٢)

الحـــــــل

الميل = ظا٤٥ = ١

$$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$$

$$\frac{ص - ٢}{س - ٣} = ١$$

ص - ٢ = س - ٣   س - ص - ١ = ٠

مثال٦ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطتين (٤ ، -٢) ، (٥ ، ٣)

الحـــــــل

$$الميل = \frac{٣ - ٢}{٥ - ٤} = \frac{٥}{١} = ٥$$

$$م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$$

$$\frac{ص - ٣}{س - ٥} = ٥$$

٥ (س - ٥) = ص - ٣

٥س - ٢٥ = ص - ٣   ∴ ٥س - ص - ٢٢ = ٠

مثال٧ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى ميله ٣ ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات جزءاً طوله ٧ وحدات طوليه

الحـــــــل

ص = م س + جـ   حيث م هو ميل المستقيم ، جـ الجزء المقطوع من محور الصادات

ص = ٣ س - ٧

لإيجاد معادلة المستقيم الذى يقطع محور السينات فى (أ ، ٠) ، ويقطع محور الصادات فى (٠ ، ب)

تكون المعادله هى $\frac{س}{م} + \frac{ص}{ب} = ١$

مثال٨ أوجد معادله المستقيم الذى يقطع من الجزء الموجب لمحور السينات ٤ وحدات ويقطع من الجزء السالب لمحور الصادات ٣ وحدات

الحــــــل

$\frac{س}{٤} + \frac{ص}{-٣} = ١$ بالضرب فى ١٢

$٣س - ٤ص = ١٢$

مثال٩ أوجد الجزء المقطوع من محور السينات والصادات للمعادله ٣س + ٥ص = ١٥

الحــــــل

$٣س + ٥ص = ١٥$ بالقسمة على ١٥

$\frac{٣س}{١٥} + \frac{٥ص}{١٥} = \frac{١٥}{١٥}$ $\frac{س}{٥} + \frac{ص}{٣} = ١$

الجزء المقطوع من محور السينات هو ٥ وحدات والجزء المقطوع من محور الصادات هو ٣ وحدات

طريقة حل اخرى $٣س + ٥ص = ١٥$

الجزء المقطوع من محور السينات نضع ص = ٠ ∴ $٣س + ٠ = ١٥$ ∴ $س = \frac{١٥}{٣} = ٥$

الجزء المقطوع من محور الصادات نضع س = ٠ ∴ $٠ + ٥ص = ١٥$ ∴ $ص = \frac{١٥}{٥} = ٣$

تدريب١ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، ٠) ، (٠ ، -٧)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

ملاحظات هامه

١) شرط توازى مستقيمان $م_1 = م_2$

٢) شرط تعامد مستقيمان $م_1 \times م_2 = -1$

مثال ١٠ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه (١ ، ٢) موازياً المستقيم ٢ س + ٣ ص - ٦ = ٠

الحـــــــل

$$م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

ميل المستقم المعطى = $\frac{-2}{3}$ ، المستقيمان متوازيان $م_1 = م_2 = \frac{-2}{3}$

$$\frac{ص - 2}{س - 1} = \frac{-2}{3}$$

٣ (ص - ٢) = -٢ (س - ١)

٣ص - ٦ = -٢س + ٢ ٢س + ٣ص - ٨ = ٠

مثال ١٠ أوجد المعادله العامه للمستقيم الذى يمر بالنقطه (٣ ، -٤) وعمودى على المستقيم س + ٢ ص - ٧ = ٠

الحـــــــل

$$م = \frac{ص - ص_1}{س - س_1}$$

ميل المستقم المعطى = $\frac{-1}{2}$ ، المستقيمان متعامدان ميل المستقيم المطلوب = ٢

$$\frac{ص + 4}{س - 3} = 2$$

٢(س - ٣) = ص + ٤ ٢س - ٦ = ص + ٤

٢س - ص - ١٠ = ٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المعادله المتجهه

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{ى}$

حيث $\overleftarrow{و}$ هى النقطه التى يمر بها المستقيم ، $\overleftarrow{ى}$ متجه فى إتجاه المستقيم ، ك ثابت لايساوى الصفر

تدريبات سريعه

١) إذا كان ميل المستقيم $\frac{٣}{٥}$ فإن المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ...(٥ ، ٣)........

٢) إذا كان ميل المستقيم $\frac{-٢}{٣}$ فإن المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ...(٣ ، -٢)........

٣) إذا كان ميل المستقيم ٤ فإن المتجه $\overleftarrow{ى}$ = ...(١ ، ٤)........

٤) إذا كان $\overleftarrow{ى}$ (٣ ، ٢) فإن ميل المستقيم = ...$\frac{٢}{٣}$........

٥) إذا كان $\overleftarrow{ى}$ (-٣ ، ٢) فإن ميل المستقيم = ...$\frac{-٢}{٣}$........

٦) إذا كان المتجه $\overleftarrow{ى}$ (٣ ، ٢) فإن المتجه العمودى هو ....$\overleftarrow{ن}$(٢ ، -٣)

ممكن وضع المتجه العمودى على الصوره $\overleftarrow{ن}$(-٢ ، ٣)

٧) إذا كان المتجه $\overleftarrow{ى}$ (-٢ ، ١) فإن المتجه العمودى هو ....$\overleftarrow{ن}$(١ ، ٢)

مثال أوجد الصور المختلفة لمعادلة المستقيم الذى يمر بالنقطه $\overleftarrow{و}$ (٣ ، -٢) والمتجه $\overleftarrow{ى}$ (-٢ ، ١)

الحـــــل

$\overleftarrow{ر} = \overleftarrow{و} + ك \overleftarrow{ى}$

= (٣ ، -٢) + ك (-٢ ، ١) المعادله المتجهه

(س ، ص) = (٣ ، -٢) + ك (-٢ ، ١)

س = ٣ - ٢ك ، ص = -٢ + ك المعادلتان البارامتريتان (الوسيطيتان)

لإيجاد المعادله العامه م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ $\frac{ص + ٤}{س - ٣} = \frac{-١}{٢}$ حيث م = $\frac{١}{-٢} = \frac{-١}{٢}$

س - ٣ = = -٢ (ص + ٢) ∴ س + ٢ص + ١ = ٠

أ/أحمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (٣، –٥)

ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية $\frac{٣}{٤}$

الحـــــــــل

الميل = ظا $\frac{٣}{٤}$ = ظا ١٣٥° = –١ ∴ الميل = $\frac{-١}{١}$ متجه اتجاه المستقيم ى (١ ، –١)

$\vec{ر} = \vec{ن} + ك \vec{ى}$ = (٣، –٥) + ك (١ ، –١) المعادله المتجهه

(س ، ص) = (٣، –٥) + ك (١ ، –١)

س = ٣ + ك ، ص = –٥ – ك المعادلتان البارامتريتان (الوسيطيتان)

لإيجاد المعادله العامه م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{ص + ٥}{س - ٣}$ = –١

–١ (س – ٣) = ص + ٥

– س + ٣ = ص + ٥ ص + س + ٢ = ٠

تدريب أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم المار بالنقطة (١ ، ٤)

ويصنع مع الاتجاه الموجب لمحور السينات زاوية $\frac{٣}{٤}$

الحـــــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٣ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $\vec{ب}$ (-٣ ، ٢)

وعمودى على المتجه $\vec{ن}$ (١ ، ٤)

الحـــــــل

متجه اتجاه المستقيم ى = (٤، -١) ، م = $\frac{-1}{4}$

$\vec{ر} = \vec{ب} + ك \vec{ى}$

= (-٣ ، ٢) + ك (٤، -١) المعادله المتجهه

(س ، ص) = (-٣ ، ٢) + ك (٤، -١)

س = -٣ + ٤ك ، ص = ٢ - ك المعادلتان البارامتريتان (الوسيطيتان)

لإيجاد المعادله العامه م = $\frac{ص - ص_1}{س - س_1}$ = $\frac{ص - ٢}{س + ٣}$ = $\frac{-1}{4}$

٤(ص - ٢) = - (س + ٣)

٤ص - ٨ = - س - ٣ س + ٤ص - ٥ = ٠

تدريب٢ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة $\vec{ب}$ (-١،١)

وعمودى على المتجه $\vec{ن}$ (٤، -٣)

الحـــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٤ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطتين $\overleftarrow{و}$ (٣ ، -١) ، $\overleftarrow{ن}$ (-٢ ، ٤)

الحـــــــــل

الميل بمعلومية نقطتين م = $\frac{٤ \quad ١}{-٢ \quad -٣}$ = $\frac{٥}{-٥}$ ى (-٥ ، ٥)

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ يمكن التعويض بأى نقطه

= (٣ ، -١) + ك (-٥ ، ٥) المعادله المتجهه

(س ، ص) = (٣ ، -١) + ك (-٥ ، ٥)

س = ٣ - ٥ ك ، ص = -١ + ٥ ك المعادلتان البارامتريتان (الوسيطيتان)

لإيجاد المعادله العامه م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ = $\frac{ص + ١}{س - ٣}$ = $\frac{٥}{-٥}$

٥ (س - ٣) = - ٥(ص + ١)

٥س - ١٥ = -٥ ص - ٥ ∴ ٥ س + ٥ص - ١٠ = ٠ بالقسمة على ٥

س + ص - ٢ = ٠

مثال٥ أوجد الصور المختلفه لمعادلة الخط المستقيم الذى يمر بالنقطة (٣ ، ١)

ويوازى المستقيم ٤س + ٣ص = ٥ الحـــــــــل

ميل المستقم المعطى = $\frac{-٤}{٣}$ ، المستقيمان متوازيان ∴ ميل المستقيم المطلوب = $\frac{-٤}{٣}$

ى = (٣ ، -٤)

$\overleftarrow{ر}$ = $\overleftarrow{و}$ + ك $\overleftarrow{ى}$ يمكن التعويض بأى نقطه

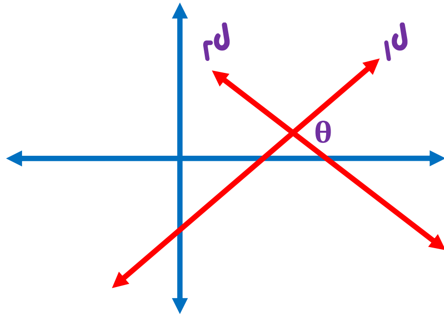
= (٣ ، ١) + ك (٣ ، -٤) المعادله المتجهه

(س ، ص) = (٣ ، ١) + ك (٣ ، -٤) أكمل المعادله العامه هى ٤س + ٣ص - ١٥ = ٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

قياس الزاويه بين مستقيمين

الزاويه الحاده بين مستقيمين



$$ظا\ \theta = \left| \frac{م_١ \quad م_٢}{١ \quad م_١\ م_٢} \right|$$

حيث $م_١$ هو ميل المستقيم الاول ، $م_٢$ هو ميل المستقيم الثانى

مثال١ أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان ٢س – ص = ٣ ، س + ص – ٥ = ٠

الحــــــــل

$م_١ = \frac{-٢}{-١} = \frac{٢}{١} = ٢$ ، $م_٢ = \frac{-١}{١} = -١$

$$ظا\ \theta = \left| \frac{م_١ \quad م_٢}{١ \quad م_١\ م_٢} \right| = \left| \frac{٢ \quad ١}{١ \quad ٢ \quad -١} \right| = \left| \frac{٣}{١-٢} \right| = \left| \frac{٣}{١} \right| = ٣$$

$\theta = ٣٤ /\ ٧١^{\circ}$

تدريب١ أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان ٣س – ٤ص = ١ ، س + ٢ص – ٨ =

الحــــــــل

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٢ أوجد قياس الزاويه بين المستقيمان $\vec{ر}_1 = (٨ ، ٠) + ك(٣ ، ١)$ ، $\vec{ر}_2 = (٠ ، ٢) + ك(١ ، ٢)$

الحـــل

ى١ = (٣ ، ١) ∴ $م_1 = \frac{1}{3}$

ى٢ = (١ ، ٢) ∴ $م_2 = \frac{2}{1} = 2$

$$ظا\ \theta = \left|\frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2}\right|$$

$$= \left|\frac{\frac{1}{3} - 2}{1 + \frac{1}{3} \times 2}\right| = \left|\frac{-\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right| = |-1| = 1 \qquad \theta = 45^\circ$$

مثال ٣ أثبت أن النقاط أ (٦ ، ٥) ، ب (٦ ، ١) ، جـ (٣ ، ١) هى رؤوس مثلث ثم أوجد قياسات الزوايا الداخله للمثلث

الحـــل

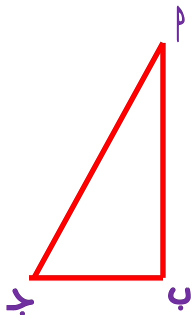
$أب = \sqrt{(6-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{0 + 16} = 4$

$ب جـ = \sqrt{(3-6)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{9 + 0} = 3$

$أ جـ = \sqrt{(3-6)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$ يجب ان يكون مجموع اصغر ضلعين اكبر من الضلع الثالث

∴ أب + ب جـ > أ جـ ∴ النقاط أ ، ب ، جـ تصلح أن تكون مثلث

$(أ جـ)^2 = (أب)^2 + (ب جـ)^2$ ∠ب قائمة ، ∠جـ ، ∠أ حاده



، لإيجاد ∠جـ نوجد ميل جـ أ ، جـ ب

$م_{جـ أ} = \frac{1-5}{3-6} = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$ ، $م_{جـ ب} = \frac{1-1}{3-6} = 0$

$$ظا\ جـ = \frac{م_1 - م_2}{1 + م_1 م_2} = \frac{\frac{4}{3} - 0}{1 + \frac{4}{3} \times 0} = \frac{4}{3} \qquad ∠جـ = 53^\circ\ 7'\ 48''$$

، لإيجاد ∠أ $ق(∠أ) = 180 - (90 + 53^\circ\ 7'\ 48'') = 36^\circ\ 52'\ 12''$

مثال ٣ إذا كان قياس الزاويه بين المستقيمين $ل_١$: س − ٢ص + ١ = ٠

، $ل_٢$: س + ك ص + ٢ = ٠ يساوى ٤٥° أوجد قيمة ك **الحـــــل**

$م_١ = \frac{-١}{-٢} = \frac{١}{٢}$ ، $م_٢ = \frac{-١}{ك}$

$$ظا\ \theta = \left| \frac{م_١ \quad م_٢}{١ \quad م_١ \ م_٢} \right|$$

$$ظا٤٥ = \left| \frac{\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{ك}}{١ + \left(\frac{١}{٢}\right)\left(\frac{١}{ك}\right)} \right|$$

$$١ = \left| \frac{\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{ك}}{١ \quad \frac{١}{٢ك}} \right|$$

$$١ = \frac{\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{ك}}{١ \quad \frac{١}{٢ك}}$$

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = ١ - \frac{١}{٢ك}$$

$$\frac{١}{ك} + \frac{١}{٢ك} = ١ - \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{ك}\left(١ + \frac{١}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{ك}\left(\frac{٣}{٢}\right) = \frac{١}{٢}$$

$$\frac{١}{ك} = \frac{١}{٢} \times \frac{٢}{٣}$$

$\frac{١}{ك} = \frac{١}{٣}$ ، ك = ٣

$$١ = \frac{\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{ك}}{١ \quad \frac{١}{٢ك}}$$

$$-١ = \frac{\frac{١}{٢} \quad \frac{١}{ك}}{١ \quad \frac{١}{٢ك}}$$

$$\frac{١}{٢} + \frac{١}{ك} = -١ + \frac{١}{٢ك}$$

$$\frac{١}{٢} + ١ = \frac{١}{ك} + \frac{١}{٢ك}$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{١}{ك}\left(١ + \frac{١}{٢}\right)$$

$$\frac{٣}{٢} = \frac{١}{ك}\left(\frac{٣}{٢}\right)$$

$$\frac{٣}{٢} \times \frac{٢}{٣} = \frac{١}{ك}$$

$\frac{١}{ك} = ١$ ، ك = ١

مثال هام إذا كان س = ٣ ، ص = ٢ فإن الزاويه بين المستقيمان = ... ٩٠ درجه

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

طول العمود المرسوم من نقطه الى مستقيم

إيجاد طول العمود

فى الشكل المقابل :

$(س_١ ، ص_١)$

أ س + ب ص + ج = ٠

$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

مثال١ أوجد طول العمود الساقط من (-٢ ، ٥) ، على المستقيم ٣س + ٤ص + ٦ = ٠

$$ل = \frac{|أ س_١ + ب ص_١ + ج|}{\sqrt{أ^٢ + ب^٢}}$$

$$= \frac{|٣س + ٤ص + ٦|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$$

$$= \frac{|٣ \times -٢ + ٤ \times ٥ + ٦|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{٣٠}{٥} = ٦ \text{ وحدة طول}$$

$$= \frac{|-٦ + ٢٠ + ٦|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٠}{٥} = ٤$$

مثال٢ أوجد طول العمود الساقط من (٧ ، -٢) على المستقيم الذى يمر بالنقطتين (٥ ، -١) ، (٢ ، ٣)

لايجاد معادلة المستقيم : $م = \frac{٣ - -١}{٢ - ٥} = \frac{٤}{-٣} = \frac{-٤}{٣}$

معادلة المستقيم $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ $\frac{ص - ٣}{س - ٢} = \frac{-٤}{٣}$

٣ (ص - ٣) = - ٤ (س - ٢)

٣ص - ٩ = - ٤س + ٨ ٤س + ٣ص - ١٧ = ٠

$$ل = \frac{|٤س + ٣ص - ١٧|}{\sqrt{٤^٢ + ٣^٢}}$$

$$ل = \frac{|٤ \times ٧ + ٣ \times -٢ - ١٧|}{\sqrt{١٦ + ٩}} = \frac{|٢٨ - ٦ - ١٧|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٥}{٥} = ١$$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٣ أوجد طول العمود المرسوم من النقطه (٣ ، ٥) الى المستقيم ر = (-١ ، ٢) + ك (٤ ، -٣)

الحـــــــــل

معادلة المستقيم $م = \frac{ص - ص_١}{س - س_١}$ ، $\frac{ص - ٢}{س + ١} = \frac{-٣}{٤}$

٤ (ص - ٢) = - ٣ (س + ١)

٤ص - ٨ = -٣س - ٣

٣س + ٤ص - ٥ = ٠

$ل = \frac{|٣س + ٤ص - ٥|}{\sqrt{٣^٢ + ٤^٢}}$

$ل = \frac{|٣ \times ٣ + ٤ \times ٥ - ٥|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٩ + ٢٠ - ٥|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{٢٤}{٥}$

تدريب١ أوجد طول العمود المرسوم من النقطه (-٢ ، ٣) الى المستقيم ر = (١ ، ٣) + ك (٤ ، ٣)

تدريب٢ أوجد طول العمود الساقط من أ (٢ ، ٤) المار بالنقطه ب (-٢ ، ٠) وميله $\frac{٢٤}{٥}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٤ أثبت أن المستقيم ٣ س + ٤ص = ٣ يوازى المستقيم المار بالنقطتين (١ ، -٢) ، (-٣ ، ١)

وأوجد البعد بينهما

الحـــــــل

$م_1 = \frac{-٣}{٤}$ ، $م_2 = \frac{١ - ٢}{-٣ - ١} = \frac{٣}{-٤} = \frac{-٣}{٤}$

$م_1 = م_2 = \frac{-٣}{٤}$ المستقيمان متوازيان

ولإيجاد طول العمود المرسوم من النقطه (١ ، -٢) للمستقيم ٣ س + ٤ص - ٣ = ٠

$ل = \frac{|٣س + ٤ص - ٣|}{\sqrt{٣^2 + ٤^2}}$

$ل = \frac{|٣ \times ١ + ٤ \times -٢ - ٣|}{\sqrt{٩ + ١٦}} = \frac{|٣ - ٨ - ٣|}{\sqrt{٢٥}} = \frac{|٨|}{٥} = \frac{٨}{٥} = ١.٦$ وحدة طول

مثال ٥ أثبت أن المستقيم ر = (٠ ، ٤) + ك (١ ، -٢) يوازى المستقيم ٢س + ص + ٢ = ٠

وأوجد البعد بينهما

الحـــــــل

$م_1 = \frac{-٢}{١}$ ، $م_2 = \frac{-٢}{١}$

$م_1 = م_2 = \frac{-٢}{١}$ المستقيمان متوازيان

ولإيجاد طول العمود المرسوم من النقطه (٠ ، ٤) للمستقيم ٢ س + ص + ٢ = ٠

$ل = \frac{|٢س + ص + ٢|}{\sqrt{٢^2 + ١^2}}$

$ل = \frac{|٢ \times ٠ + ٤ + ٢|}{\sqrt{٤ + ١}} = \frac{|٦|}{\sqrt{٥}} = \frac{٦}{\sqrt{٥}}$

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

المعادله العامه للخط المستقيم المار بنقطة تقاطع مستقيمان

مثال أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان

ل١ : ٣ س + ٢ص – ٧ = ٠ ، ل٢ : س + ٣ص – ٧ = ٠ ومار بالنقطه (٣ ، ١)

الحـــــــــل

أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الآله

جبرياً بضرب المعادله الثانيه فى –٣ –٣ س – ٩ ص + ٢١ = ٠ وجمع المعادلتين

٣ س + ٢ص – ٧ = ٠

–٣ س – ٩ ص + ٢١ = ٠

–٧ ص + ١٤ = ٠ ∴ –٧ ص = –١٤ ∴ ص = $\frac{-١٤}{-٧}$ = ٢

وبالتعويض فى المعادله الثانيه ∴ س = ١

نقطة تقاطع المستقيمان هى (١ ، ٢)

لإيجاد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (٣ ، ١) ، (١ ، ٢) م = $\frac{٢ - ١}{١ - ٣}$ = $\frac{١}{-٢}$ = $\frac{-١}{٢}$

م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

$\frac{ص - ١}{س - ٣}$ = $\frac{-١}{٢}$

٢(ص – ١) = – (س – ٣)

٢ص – ٢ = – س + ٣ س + ٢ص – ٥ = ٠

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال٢ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان

ل١ : ٣ س + ٢ص = ١٠ ، ل٢ : ٥ س - ٣ص - ٤ = ٠

وعمودى على المستقيم ٢س + ٧ص - ٤ = ٠

الحــــــــــل

أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الاله

نقطة تقاطع المستقيمان هى (٢ ، ٢)

ميل المستقيم ٢س + ٧ص - ٤ = ٠ م = $\frac{-٢}{٧}$

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{٧}{٢}$

م = $\frac{ص - ص_١}{س - س_١}$

$\frac{ص - ٢}{س - ٢}$ = $\frac{٧}{٢}$

٢(ص - ٢) = ٧ (س - ٢)

٢ص - ٤ = ٧س - ١٤

٧س + ٢ص + ١٠ = ٠

تدريب١ أوجد معادلة المستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان

ل١ : س + ٢ص - ٥ = ٠ ، ل٢ : ٢س - ٣ص + ٤ = ٠ ومار بالنقطة (-١ ، ٠)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩

مثال ٣ أوجد المعادله المتجه للمستقيم المار بنقطة تقاطع المستقيمان

ل١ : ٣ س + ٢ص = ١٠ ، ل٢ : ٥ س - ٣ص - ٤ = ٠

ويصنع زاويه ١٣٥° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

الحـــــــل

أولاً نوجد نقطة تقاطع المستقيمان جبرياً أو باستخدام الاله

نقطة تقاطع المستقيمان هى (٢ ، ٢)

ميل المستقيم م = ظا١٣٥ = -١ ∴ ى = (-١ ، ١)

ر⃗ = (٢ ، ٢) + ك (-١ ، ١)

أ/احمد فكرى ت/٠١١١٤٧٣٣٩٥٩